

Modele numerice

M_{etoda} D_{iferentelor} F_{inite}

X. REZOLVAREA MODELULUI CURGERII PLAN-ORIZONTALE PRIN MDF	2
X.1. Schema diferentelor finite centrate	3
X.2. Generarea sistemului de ecuatii.....	4
X.3. Rezolvarea sistemului de ecuatii.....	10
X.4. Reprezentarea grafica a curgerii plan-orizontale.....	10
Comentarii.....	13

X. Calculul spectrului hidrodinamic cu Metoda Diferentelor Finite

Modelul curgerii plan-orientale (2D), stationare si conservative intr-un acvifer sub presiune este:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0 \quad (X.1)$$

In conditiile particulare ale unui acvifer sub presiune, **neomogen** si cu **contur neregulat** (Fig.X.1 integrala generală, necesară pentru calculul **spectrului hidrodinamic** al curgerii ($H = f(x, y)$) nu poate fi obtinuta pe cale **analitica**. In lipsa unei solutii analitice, valorile sarcinii piezometrice (H) se **aproximeaza** in nodurile unei **retele de discretizare** a domeniului de extindere al acviferului, prin **metoda diferentelor finite**.

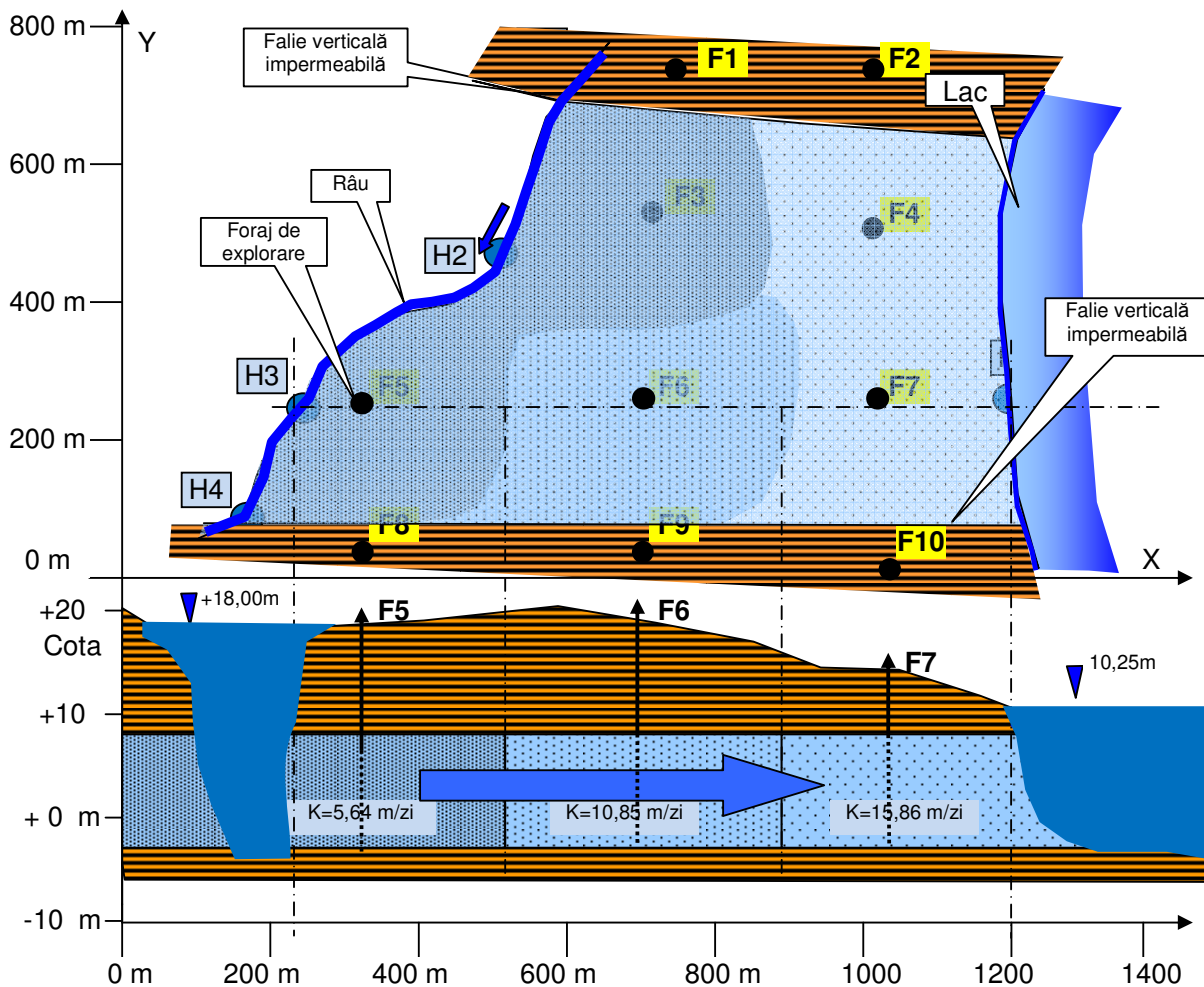


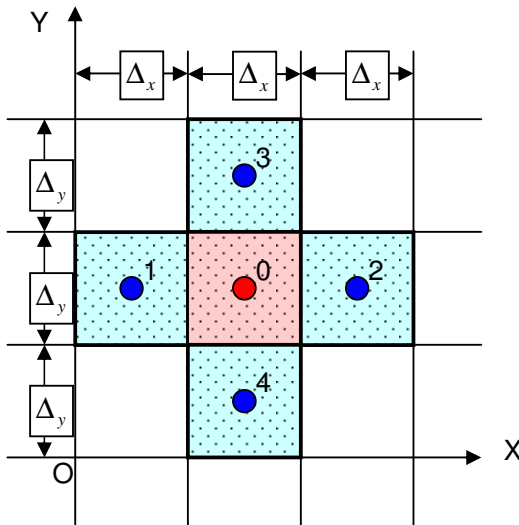
Fig.X.1. Rezultatele explorării hidrogeologice pentru un acvifer sub presiune, alimentat de un râu si drenat de un lac

X.1. Schema diferentelor finite centrate

Metoda diferentelor finite (MDF) consta in inlocuirea ecuatiei (X.1) cu un sistem de ecuatii a carui rezolvare furnizeaza valorile sarcinii piezometrice (H) in **nodurile rețelei de discretizare** aplicate pe suprafata de extindere a acviferului. Trecerea de la ecuatia (X.1) la sistemul de ecuatii algebrice se face prin utilizarea formulelor de aproximare a **derivatelor**, prin **diferente**.

Transformarea ecuatiei diferentiale (X.1) utilizand **diferentele finite centrate** se bazeaza pe:

- un model de amplasare al celulelor rectangulare în raport cu axele de coordonate (**Fig.X.1**);
- sarcinile piezometrice ($H_i; i=1,2,3,4$) și conductivitățile hidraulice din patru celule vecine ($K_i; i=1,2,3,4$) (**Tabelul X.1**):



Tabelul X.1. Sarcinile piezometrice și conductivitățile hidraulice utilizate pentru calculul diferentelor finite centrate.

Nr.crt	Sarcină piezometrică (H)	Conductivitate Hidraulică (K)
1	H_1	K_1
2	H_2	K_2
3	H_3	K_3
4	H_4	K_4
0	H_0	K_0

Fig. X.1. Schiță pentru calculul diferentelor finite centrate

Relațiile de aproximare a **derivatelor** prin **diferențe finite centrate** sunt:

B) pentru ordinul unu:

paralel cu axa OY :
$$\frac{\partial H}{\partial y} = \frac{H_0 - H_3}{\Delta_y} \text{ sau } \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{H_4 - H_0}{\Delta_y} \quad (X.2)$$

paralele cu axa OX
$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H_0 - H_2}{\Delta_x} \text{ sau } \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{H_1 - H_0}{\Delta_x} \quad (X.3)$$

b) pentru ordinul doi:

paralel cu axa OX :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \frac{K_{0-1} \frac{H_1 - H_0}{\Delta_x} - K_{0-2} \frac{H_0 - H_2}{\Delta_x}}{\Delta_x} \quad (\text{X.4})$$

paralel cu axa OY :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(K \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \frac{K_{0-4} \frac{H_4 - H_0}{\Delta_y} - K_{0-3} \frac{H_0 - H_3}{\Delta_y}}{\Delta_y} \quad (\text{X.5})$$

Ecuatia diferențială a curgerii (X.1), exprimată în **diferențe finite**, permite calculul **sarcinii piezometrice** în centrul unei celule (K_0) pe baza sarcinilor piezometrice din centrul a patru celule vecine. Prin înlocuirea în ecuația (X.1) a diferențialelor exprimate prin ecuațiile (X.4) și (X.5), dacă $\Delta_x = \Delta_y = \Delta$, se obține:

$$\frac{K_{0-1}(H_1 - H_0) - K_{0-2}(H_0 - H_2)}{\Delta^2} + \frac{K_{0-4}(H_4 - H_0) - K_{0-3}(H_0 - H_3)}{\Delta^2} = 0 \quad (\text{X.6})$$

care prin dezvoltarea calculelor:

$$K_{0-1} \cdot H_1 + K_{0-2} \cdot H_2 + K_{0-3} \cdot H_3 + K_{0-4} \cdot H_4 - K_{0-1} \cdot H_0 - K_{0-2} \cdot H_0 - K_{0-3} \cdot H_0 - K_{0-4} \cdot H_0 = 0$$

și gruparea termenilor, se poate exprima sub forma:

$$\sum_{i=1}^{i=4} K_{0-i} \cdot H_i - H_0 \cdot \sum_{i=1}^{i=4} K_{0-i} = 0 \quad (\text{X.7})$$

sau sub forma explicită a **sarcinii piezometrice din centrul celulei „0”**:

$$H_0 = \frac{1}{\sum_{i=1}^{i=4} K_{0-i}} \cdot \sum_{i=1}^{i=4} K_{0-i} \cdot H_i \quad (\text{X.8})$$

în care:

K_{0-i} este **conductivitatea hidraulică de tranziție** între două celule a căror limită de separație este traversată **perpendicular**, se evaluează cu:

$$K_{0-i} = \frac{2 \cdot K_0 \cdot K_i}{K_0 + K_i}$$

X.2. Generarea sistemului de ecuatii

Sistemul de ecuatii pentru calculul sarcinilor piezometrice se construiește pe baza rețelei de discretizare care „schematizează” geometria acviferului:

- **in plan orizontal**, pentru o rețea de discretizare pătratică cu parametrul $\Delta = 200 \text{ m}$, acviferul este „descompus” în **cinci** celule patrulate cu latura egală cu Δ (**Fig.X.2: A, B, C, D, E**).
- **in plan vertical**, pentru o curgerea plan orizontala grosimea acviferului este constanta (**Fig.X.2, Fig.X.3**)

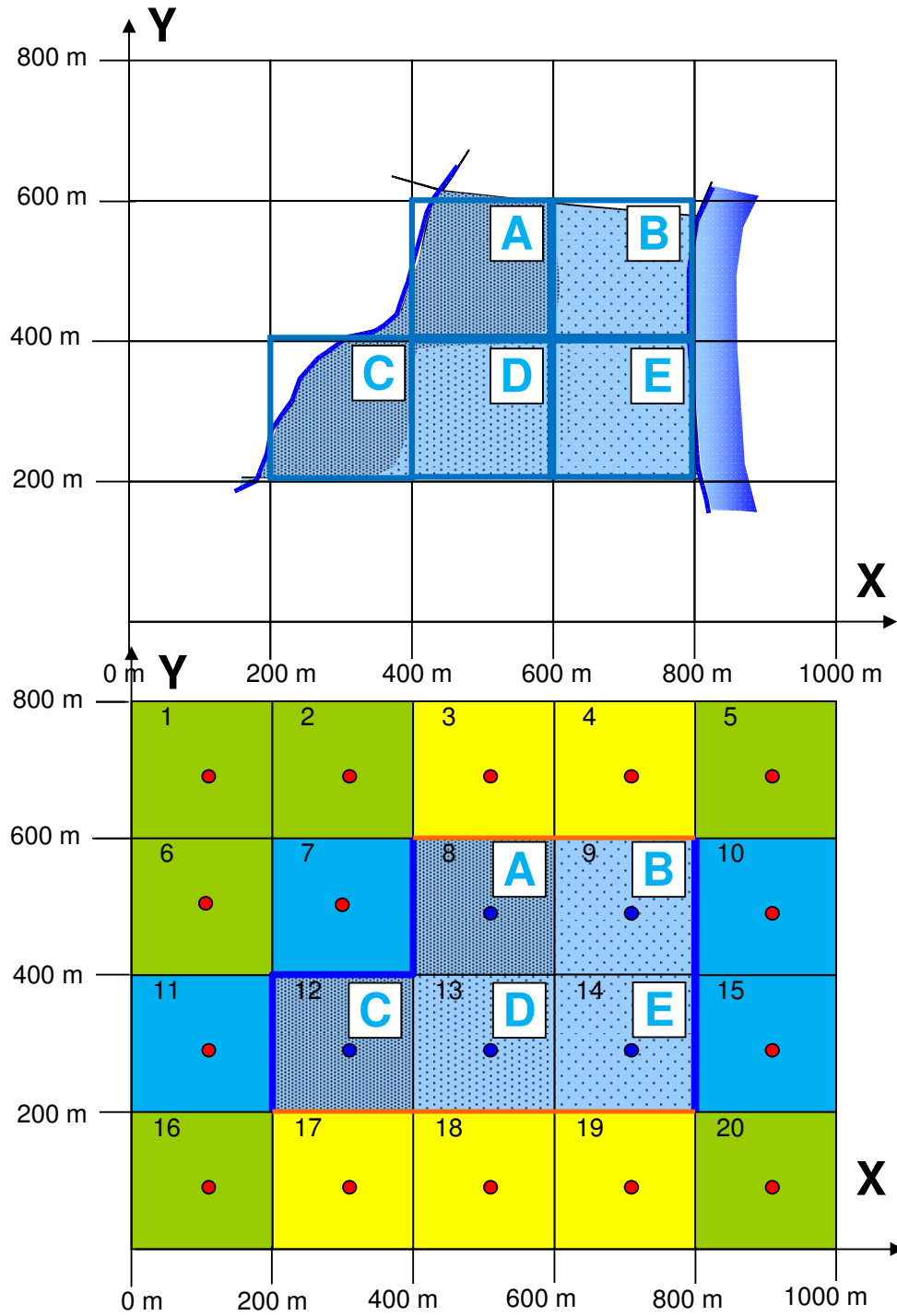


Fig.X.2. Schematizarea formei, in plan orizontal, a acviferului sub presiune din Fig.XXX.

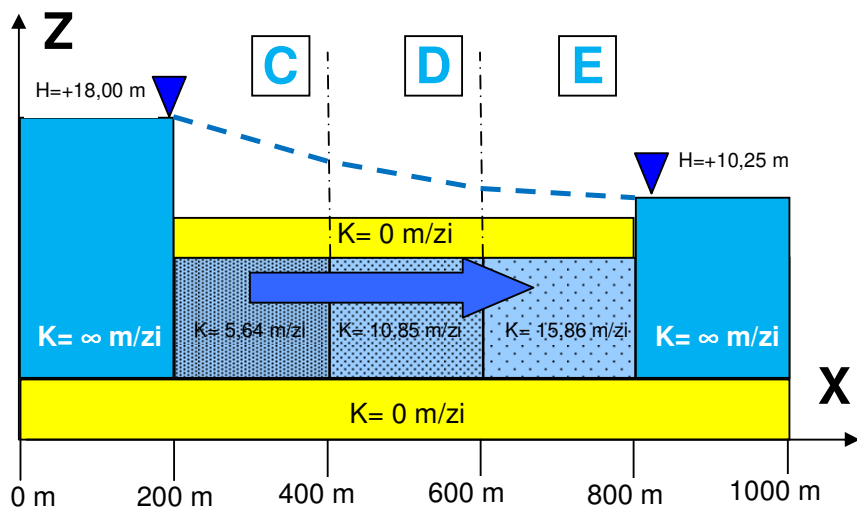
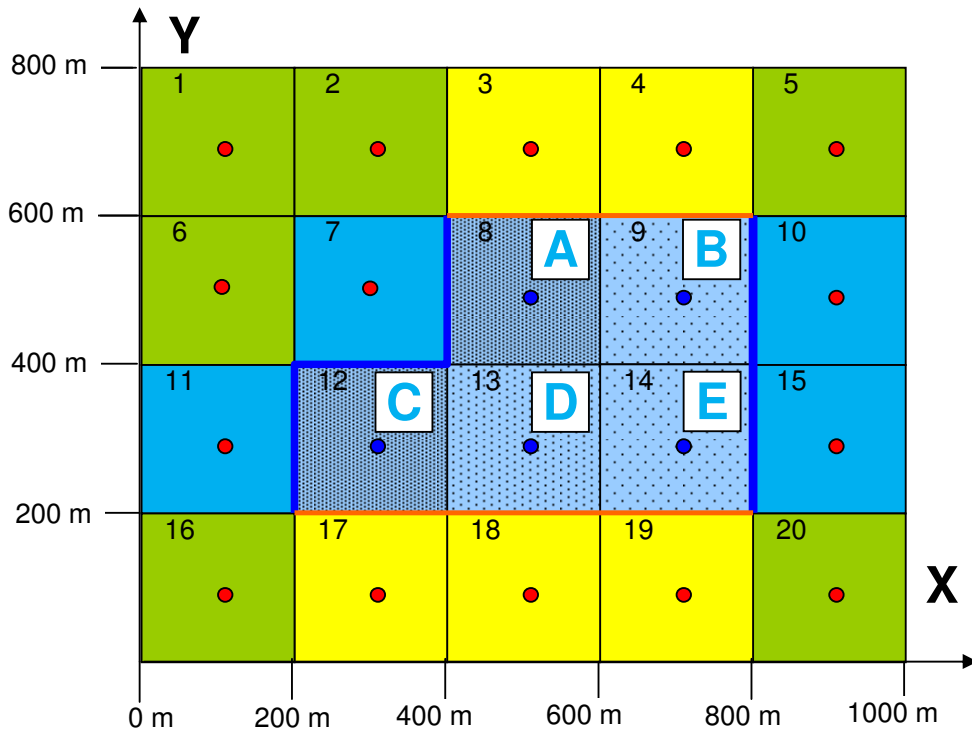


Fig.X.3. Schematizarea formei, in plan orizontal si vertical, a acviferului sub presiune din Fig.XXX.

Particularizarea ecuatiei (X.8) pentru cele cinci celule ale acviferului (A,B,C,D,E) se bazeaza pe rezultatele explorarii acviferului sub presiune (Tabelul X.2), rezultate care permit:

- evaluarea **distributiei conductivitatii hidraulice**, constanta in fiecare celula a retelei de discretizare a extinderii acviferului in plan orizontal;
- precizarea **conditiilor pe frontierele acviferului**:
 - **sarcina piezometrica constanta** (c. Dirichlet) determinata in punctele hidrometrice (H1, H1, ..., H5) si asociata cu o conductivitate hidraulica „infinita”:
 - linia albastra, pe traseul raului, pe latura vestica a celulelor 7 si 11
 - linia albastra pe conturul lacului, pe latura estica a celulelor 10 si 15
 - **contur impermeabil** (c. Neuman) stabilit pe traseul faliilor impermeabile asociat cu conductivitate hidraulica „zero”:
 - linia rosie, pe falia nordica, identificata de forajele F1 si F2, pe latura nordica a celulelor A si B
 - linia rosie, pe falia sudica, identificata de forajele F8, F9 si F10, pe latura sudica a celulelor C, D si E.

Tabelul X.2 Rezultatele explorarii hidrogeologice pentru un acvifer sub presiune, alimentat de un rau si drenat de un lac

Nr.	Cod	X[m]	Y[m]	K[m/zi]	Cota NP[m]	Observatii	(Centrul celulei) Sarcina piezometrica (H)
1	F1	536.76	662.37	0	-	Foraj in argila	(3)
2	F2	717.64	681.21	0	-	Foraj in argila	(4)
3	F3	534.87	496.56	5,64	-	Foraj in acvifer (A)	(8) H8=?
4	F4	721.41	479.60	15,70	-	Foraj in acvifer (B)	(9) H9=?
5	F5	280.51	293.07	5,64	-	Foraj in acvifer (C)	(12) H12=?
6	F6	529.22	302.49	10,85	-	Foraj in acvifer (D)	(13) H13=?
7	F7	676.19	298.72	15,86	-	Foraj in acvifer (E)	(14) H14=?
8	F8	291.81	157.40	0	-	Foraj in argila	(17)
9	F9	506.61	157.40	0	-	Foraj in argila	(18)
10	F10	708.22	151.75	0	-	Foraj in argila	(19)
11	H1	455.74	641.64	∞	21,50	Post hidrometric rau	(7)
12	H2	391.67	473.95	∞	20,24	Post hidrometric rau	NP=(21,50+20,24)/2 H7=20,87 m
13	H3	222.10	296.83	∞	18,00	Post hidrometric rau	(11)
14	H4	178.76	202.62	∞	17,25	Post hidrometric rau	NP=(18+17,25)/2 H11=17,63 m
15	H5	800.55	310.02	∞	10,25	Post hidrometric lac	(10),(15) H10=H15=10,25 m

Cele cinci ecuatii ale sistemului sunt

Celula 8:
$$H_8 = \frac{1}{K_{8-7} + K_{8-9} + K_{8-3} + K_{8-13}} (K_{8-7} \cdot H_7 + K_{8-9} \cdot H_9 + K_{8-3} \cdot H_3 + K_{8-13} \cdot H_{13})$$

in care:

$$K_{8-7} = 2 \cdot K_8 = 11,28 \text{ m/zi};$$

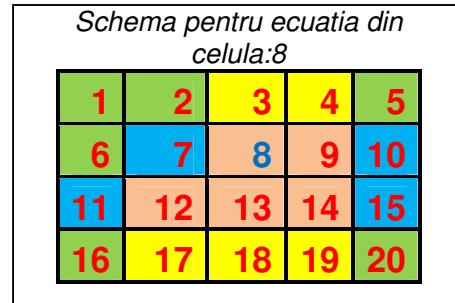
$$K_{8-9} = \frac{2 \cdot K_8 \cdot K_9}{K_8 + K_9} = \frac{2 \cdot 5,64 \cdot 15,70}{5,64 + 15,70} = 8,30 \text{ m/zi},$$

$$K_{8-13} = \frac{2 \cdot K_8 \cdot K_{13}}{K_8 + K_{13}} = \frac{2 \cdot 5,64 \cdot 10,85}{5,64 + 10,85} = 7,42 \text{ m/zi}$$

$$K_{8-3} = \frac{2 \cdot K_8 \cdot K_3}{K_8 + K_3} = \frac{2 \cdot 5,64 \cdot 0,00}{5,64 + 0,00} = 0,00 \text{ m/zi}$$

$$H_8 = \frac{1}{11,28 + 8,30 + 7,42} (11,28 \cdot 20,87 + 8,30 \cdot H_9 + 7,42 \cdot H_{13})$$

Celula 8: $27,0 \cdot H_8 - 8,30 \cdot H_9 - 7,42 \cdot H_{13} = 235,41$



Celula9:
$$H_9 = \frac{1}{K_{9-8} + K_{9-10} + K_{9-4} + K_{9-14}} (K_{9-8} \cdot H_8 + K_{9-10} \cdot H_{10} + K_{9-4} \cdot H_4 + K_{9-14} \cdot H_{14})$$

In care

$$K_{9-8} = K_{9-8} = 8,30 \text{ m/zi}$$

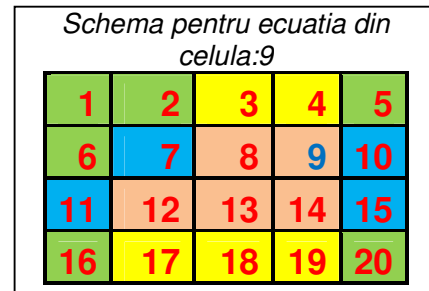
$$K_{9-10} = 2 \cdot K_9 = 2 \cdot 15,70 = 31,40 \text{ m/zi}$$

$$K_{9-4} = \frac{2 \cdot K_9 \cdot K_4}{K_9 + K_4} = \frac{2 \cdot 15,70 \cdot 0,00}{15,70 + 0,00} = 0,00 \text{ m/zi}$$

$$K_{9-14} = \frac{2 \cdot K_9 \cdot K_{14}}{K_9 + K_{14}} = \frac{2 \cdot 15,70 \cdot 15,86}{15,70 + 15,86} = 15,78 \text{ m/zi}$$

$$H_9 = \frac{1}{8,30 + 31,40 + 15,78} (8,30 \cdot H_8 + 31,40 \cdot 10,25 + 15,78 \cdot H_{14})$$

Celula 9: $-8,30 \cdot H_8 + 55,48 \cdot H_9 - 15,78 \cdot H_{14} = 321,85$



Celula 12:
$$H_{12} = \frac{1}{K_{12-11} + K_{12-13} + K_{12-7} + K_{12-17}} (K_{12-11} \cdot H_{11} + K_{12-13} \cdot H_{13} + K_{12-7} \cdot H_7 + K_{12-17} \cdot H_{17})$$

in care:

$$K_{12-11} = 2 \cdot K_{12} = 2 \cdot 5,64 = 11,28 \text{ m/zi}$$

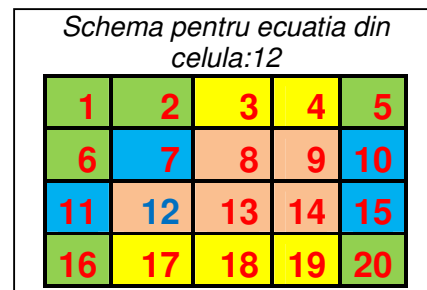
$$K_{12-13} = \frac{2 \cdot K_{12} \cdot K_{13}}{K_{12} + K_{13}} = \frac{2 \cdot 5,64 \cdot 10,85}{5,64 + 10,85} = 7,42 \text{ m/zi}$$

$$K_{12-7} = 2 \cdot K_{12} = 2 \cdot 5,00 = 11,28 \text{ m/zi}$$

$$K_{12-17} = \frac{2 \cdot K_{12} \cdot K_{17}}{K_{12} + K_{17}} = \frac{2 \cdot 5,64 \cdot 0,00}{5,64 + 0,00} = 0,00 \text{ m/zi}$$

$$H_{12} = \frac{1}{11,28 + 7,42 + 11,28} (11,28 \cdot 17,63 + 7,42 \cdot H_{13} + 11,28 \cdot 20,87)$$

Celula 12: $29,98 \cdot H_{12} - 7,42 \cdot H_{13} = 434,28$



$$\text{Celula 13: } H_{13} = \frac{1}{K_{13-12} + K_{13-14} + K_{13-8} + K_{13-18}} (K_{13-12} \cdot H_{12} + K_{13-14} \cdot H_{14} + K_{13-8} \cdot H_8 + K_{13-18} \cdot H_{18})$$

în care:

$$K_{13-12} = K_{12-13} = 7,42 \text{ m/zi}$$

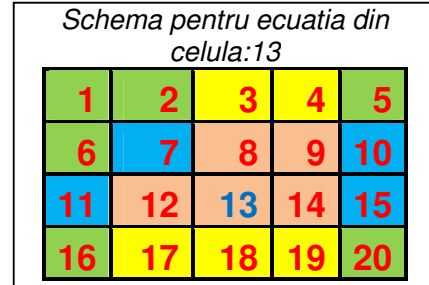
$$K_{13-14} = \frac{2 \cdot K_{13} \cdot K_{14}}{K_{13} + K_{14}} = \frac{2 \cdot 10,85 \cdot 15,86}{10,85 + 15,86} = 12,89 \text{ m/zi}$$

$$K_{13-8} = \frac{2 \cdot K_{13} \cdot K_8}{K_{13} + K_8} = \frac{2 \cdot 10,85 \cdot 5,64}{10,85 + 5,64} = K_{8-13} = 7,42 \text{ m/zi}$$

$$K_{13-18} = \frac{2 \cdot K_{13} \cdot K_{18}}{K_{13} + K_{18}} = \frac{2 \cdot 10,00 \cdot 0,00}{10,00 + 0,00} = 0,00 \text{ m/zi}$$

$$H_{13} = \frac{1}{7,42 + 12,89 + 7,42} (7,42 \cdot H_{12} + 12,89 \cdot H_{14} + 7,42 \cdot H_8)$$

$$\text{Celula 13: } -7,42 \cdot H_8 - 7,42 \cdot H_{12} + 27,73 \cdot H_{13} - 12,89 \cdot H_{14} = 0,00$$



$$\text{Celula 14: } H_{14} = \frac{1}{K_{14-13} + K_{14-15} + K_{14-9} + K_{14-19}} (K_{14-13} \cdot H_{13} + K_{14-15} \cdot H_{15} + K_{14-9} \cdot H_9 + K_{14-19} \cdot H_{19})$$

în care:

$$K_{14-13} = K_{13-14} = 12,89 \text{ m/zi}$$

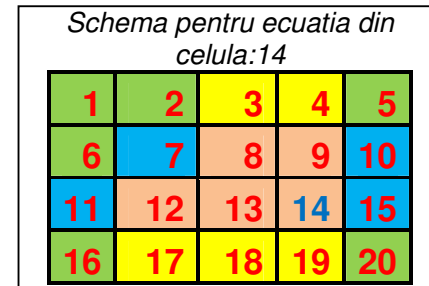
$$K_{14-15} = 2 \cdot K_{14} = 2 \cdot 15,86 = 31,72 \text{ m/zi}$$

$$K_{14-9} = K_{9-14} = 15,78 \text{ m/zi}$$

$$K_{14-19} = \frac{2 \cdot K_{14} \cdot K_{19}}{K_{14} + K_{19}} = \frac{2 \cdot 15,86 \cdot 0,00}{15,86 + 0,00} = 0,00 \text{ m/zi}$$

$$H_{14} = \frac{1}{12,89 + 31,72 + 15,78} (12,89 \cdot H_{13} + 31,72 \cdot H_{15} + 15,78 \cdot H_9)$$

$$\text{Celula 14: } -15,78 \cdot H_9 - 12,89 \cdot H_{13} + 60,38 \cdot H_{14} = 325,13$$



Sintetizate tabelar (**Tabelul X.3**), cele cinci ecuatii sunt utilizate pentru calculul celor cinci sarcini piezometrice din celulele: 8, 9, 12, 13 si 14.

Tabelul X.3. Sintetiza celor cinci ecuatii ale sistemului

Celula	Coeficientii necunoscutelor					Termen liber
	H8	H9	H12	H13	H14	
8	27.00	-8.30	0.00	-7.42	0.00	235.41
9	-8.30	55.48	0.00	0.00	-15.78	321.85
12	0.00	0.00	29.98	-7.42	0.00	434.28
13	-7.42	0.00	-7.42	27.73	-12.89	0.00
14	0.00	-15.78	0.00	-12.89	60.38	325.13

X.3. Rezolvarea sistemului de ecuatii

Sistemul de ecuatii al modelului in diferente finite poate fi scris sub forma matriciala:

$$\begin{bmatrix} 27,00 & -8,30 & 0,00 & -7,42 & 0,00 \\ -8,30 & 55,48 & 0,00 & +0,00 & -15,78 \\ 0,00 & 0,00 & 29,98 & -7,42 & 0,00 \\ -7,42 & 0,00 & -7,42 & 27,73 & -12,89 \\ 0,00 & -15,78 & 0,00 & -12,89 & 69,38 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_8 \\ H_9 \\ H_{12} \\ H_{13} \\ H_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 235,41 \\ 321,85 \\ 434,28 \\ 0,00 \\ 300,00 \end{bmatrix}$$

Necunoscutele sistemului sunt sarcinile piezometrice din centrul celor cinci celule in care a fost „discretizat” acviferul. Valorile sarcinilor piezometrice se obtin prin inmultirea sistemului cu matricea inversa a coeficientilor celor cinci necunoscute:

$$\begin{bmatrix} H_8 \\ H_9 \\ H_{12} \\ H_{13} \\ H_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27,00 & -8,30 & 0,00 & -7,42 & 0,00 \\ -8,30 & 55,48 & 0,00 & 0,00 & -15,78 \\ 0,00 & 0,00 & 29,98 & -7,42 & 0,00 \\ -7,42 & 0,00 & -7,42 & 27,73 & -12,89 \\ 0,00 & -15,78 & 0,00 & -12,89 & 69,38 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 235,41 \\ 321,85 \\ 434,28 \\ 0,00 \\ 300,00 \end{bmatrix}$$

Rezultatul multiplicarii vectorului termenilor liber cu matricea inversa este:

$$\begin{bmatrix} H_8 \\ H_9 \\ H_{12} \\ H_{13} \\ H_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,04 & 0,01 & 0,00 & 0,02 & 0,01 \\ 0,01 & 0,02 & 0,00 & 0,01 & 0,01 \\ 0,00 & 0,00 & 0,04 & 0,01 & 0,00 \\ 0,02 & 0,00 & 0,01 & 0,05 & 0,01 \\ 0,00 & 0,01 & 0,00 & 0,01 & 0,02 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 235,41 \\ 321,85 \\ 434,28 \\ 0,00 \\ 300,00 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16,25 \\ 11,50 \\ 18,08 \\ 14,53 \\ 11,49 \end{bmatrix}$$

X.4. Reprezentarea grafica a curgerii plan-orizontale

Reprezentarea grafica a curgerii plan orizontale este **spectrul hidrodinamic**, format din doua familii de curbe (ortogonale pentru un mediu izotrop):

- **liniile echipotentiale** care indica distributia energiei potentiale a acviferului (sarcina piezometrica)
- **liniile de curent** care indica directiile de curgereale apei subterane

Datele utilizate pentru construirea spectrului hidrodinamic al curgerii plan-orizontale, obtinute prin MDF, sunt (**Fig.X.4.** si **Tabelul X.4.**):

- **conturul schematizat al acviferului** pentru:
 - frontierele de sarcina piezometrica constanta:
 - traseul raului
 - malul lacului
 - frontierele impermeabile
 - falia nordica

- falia sudica
- **coordonatele centrelor celulelor de discretizare** ale formei acviferului in plan orizontal (X,Y)
- **sarcinile piezometrice** (H) in centrul celulelor plasate:
 - pe frontierele acviferului (7,11,10,15)
 - in acvifer (8,9,12,13,14)

Tabelul X.4. Date utilizate pentru reprezentarea grafica a spectrului hidrodinamic al curgerii plan- orizontale

Celula	X	Y	H
7	300	500	20.87
8	500	500	16.25
9	700	500	11.50
10	900	500	10.25
11	100	300	17.63
12	300	300	18.08
13	500	300	14.53
14	700	300	11.49
15	900	300	10.25

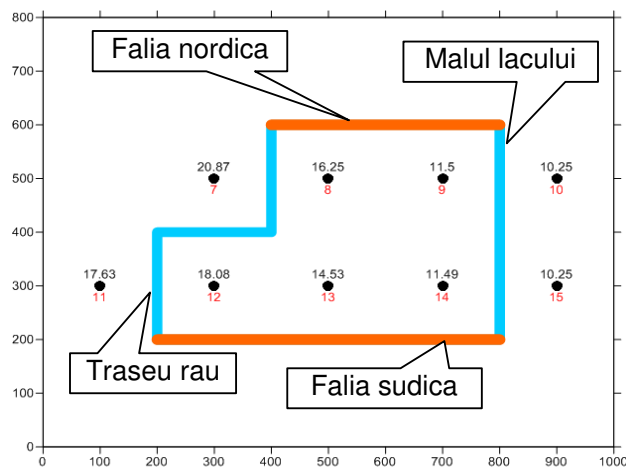


Fig.X.4. Datele utilizate pentru reprezentarea grafica a spectrului hidrodinamic al cugerii plan- orizontale

Pentru reprezentarea grafica a **spectrului hidrodinamic** se **interpoleaza**, in **interiorul frontierelor modelului** (frontierele de sarcina piezometrica constanta si al frontierelor inpermeabile) valorile sarcinilor piezometrice **impuse** (7,10,11,15) si valorile sarcinilor piezometrice **calculate** (8,9,12,13,14) realizandu-se reprezentarea grafica in doua variante:

- pe suportul de schematizare al formei acviferului in plan orizontal (**Fig.X.5. a**);
- pe suportul topografic al acviferului investigat (**Fig.X.5. b**), absolut necesara pentru a aprecia gradul de aproximare al extinderii reale a acviferului

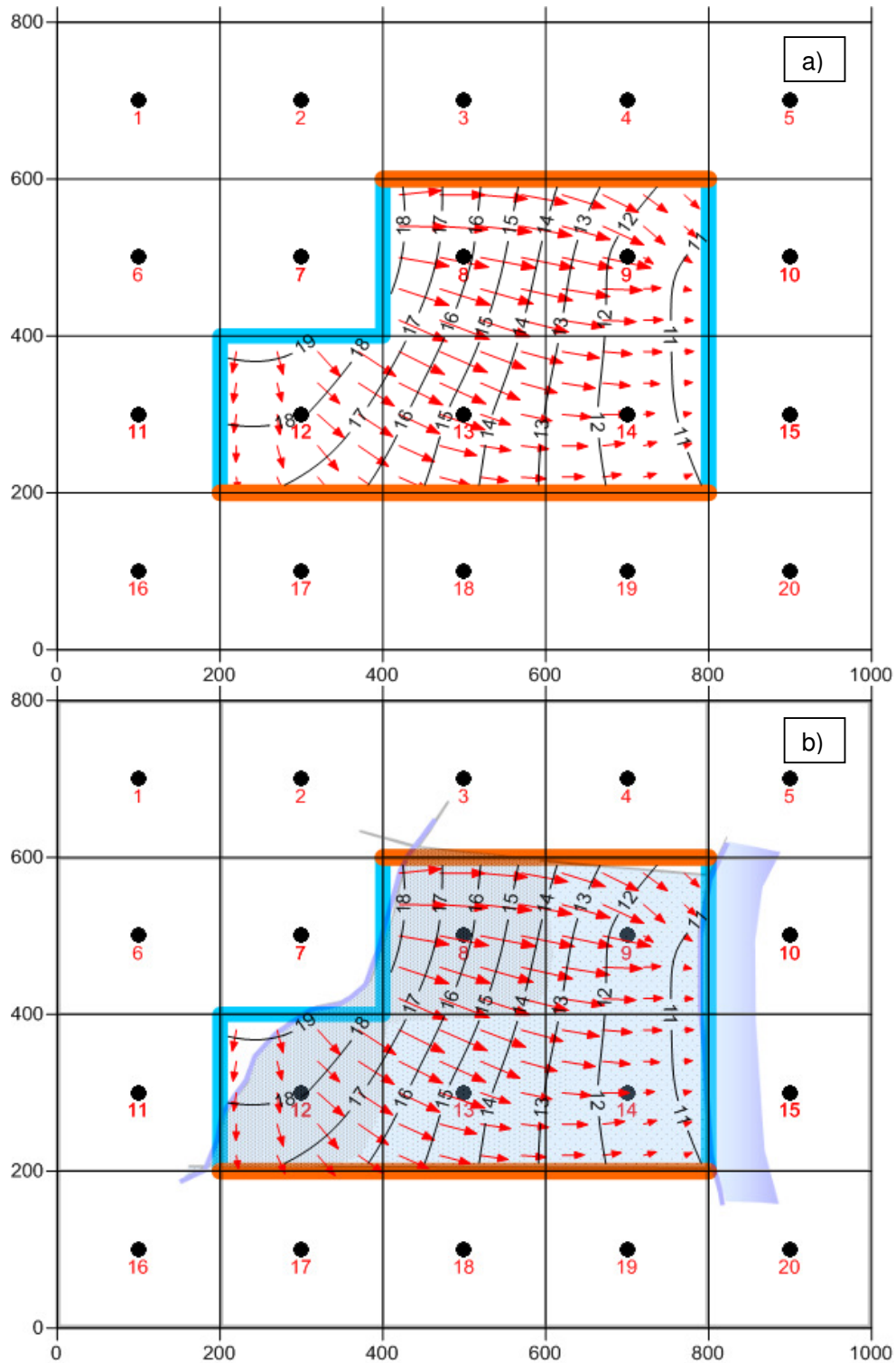


Fig. X.5. Reprezentarea grafica a spectrului hidrodinamic: **a)** pe suportul rețelei de discretizare; **b)** cu suprapunerea suportului topografic al acviferului real

Comentarii

Aproximarea spectrului hidrodinamic al curgerii apelor subterane prin metoda diferentelor finite centrate permite luarea in considerare:

- **modelul spatial** al acviferului
- **modelul parametric** acviferelor

Gradul de aproximare a spectrului hidrodinamic depinde de **acuratetea** cu care sunt **schematizate** forma acviferului si **distributia spatiala a conductivitatii acviferului**.

Acuratetea schematizarii, atat pentru forma acviferului cat si pentru variabilitatea spatiala a conductivitatii hidraulice, depinde de dimensiunea celulelor din retea de discretizare:

- daca celulele din retea de discretizare sunt MICI, forma schematizata a acviferului este foarte apropiata de cea reala si redarea spectrului hidrodinamic este realizata cu erori MICI.
- daca celulele din retea de discretizare sunt MARI, forma schematizata a acviferului aproximeaza grosier forma lui reala si redarea spectrului hidrodinamic este realizata cu erori MARI.

Reducerea dimensiunii celulelor de discretizare este limitata de dificultatea solutionarii sistemelor cu un numar mare de ecuatii.