3.5. FORŢE HIDROSTATICE

Forţele hidrostice sunt efectul acţiunii presiunilor hidrostice, şi sunt forţe care acţionează pe:

- ***suprafeţe plane***, când sistemul de forţe rezultant este compus dintr-un sistem de forţe paralele care au o rezultantă unică ce se aplică în centrul de greutate al suprafeţei plane;
- ***suprafeţe curbe deschise***, când sistemul de forţe este tridimensional şi poate fi exprimat în două forme:
  - ***o forţă*** rezultantă şi ***un moment***
  - ***trei forţe*** neconcurente orientate paralel cu axele sistemului de referinţă.
- ***suprafeţe închise*** când efectul se manifestă sub forma unei forţe verticale ascendente (***forţa arhimedică***) egală cu greutatea lichidului dezlocuit de suprafaţa închisă.

3.5.1. Forţe hidrostatice pe suprafeţe plane

Forţa hidrostatică (dF_p) pe un element de suprafaţă (dA) plasat într-un plan care face cu orizontala unghiul α este (***Fig. 3.13***):

$$dF_p = p \cdot dA$$

în care înlocuind:

$$p = \gamma \cdot h = \gamma \cdot y \cdot \sin\alpha$$

se obţine:

$$dF_p = \gamma \cdot y \cdot \sin\alpha \cdot dA$$

şi prin integrare pe toata suprafata A conduce la:

$$F_p = \int \gamma \cdot y \cdot \sin\alpha \cdot dA = \gamma \cdot \sin\alpha \cdot y_G \cdot A = \gamma \cdot h_G \cdot A$$

Forţa de presiune pe o suprafaţă plană are următoarele caracteristici:

- modulul egal cu greutatea lichidului din cilindrul cu baza A şi generatoarea egală cu adâncimea centrului de greutate (h_G) al suprafeţei;
- orientată normal la suprafaţa A şi acţionează dinspre lichid spre suprafaţa plană;
- punctul de aplicaţie este centrul de presiune al suprafeţei $C(x_C, y_C)$, ale cărui coordonate se calculează cu ajutorul ecuaţiilor momentelor:

$$F_p \cdot y_C = \int_A y \cdot dF_p$$

$$F_p \cdot x_C = \int_A x \cdot dF_p$$

în care înlocuind expresia forţei de presiune se obţin ecuaţiile:

$$\gamma \cdot y_G \cdot \sin\alpha \cdot A \cdot y_C = \int_A y \cdot \gamma \cdot y \cdot \sin\alpha \cdot dA \Leftrightarrow y_G \cdot A \cdot y_C = \int_A y^2 \cdot dA$$

$$\gamma \cdot y_G \cdot \sin\alpha \cdot A \cdot x_C = \int_A x \cdot \gamma \cdot y \cdot \sin\alpha \cdot dA \Leftrightarrow y_G \cdot A \cdot x_C = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

din care rezultă:

$$x_C = \frac{1}{A \cdot y_G}\int_A x \cdot y \cdot dA \quad \text{şi} \quad y_C = \frac{1}{A \cdot y_G}\int_A y^2 \cdot dA$$

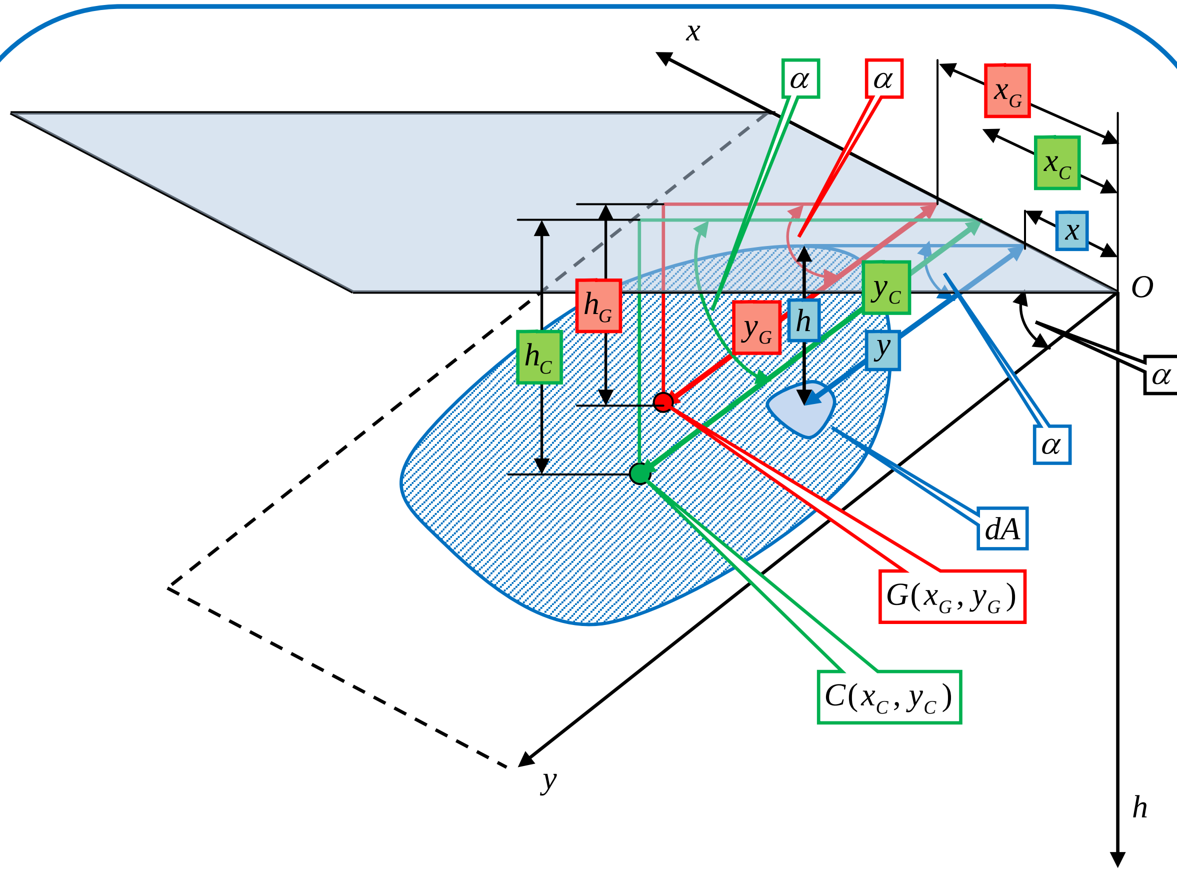


***Fig.3. 13**. Forţe hidrostatice pe suprafeţe plane*

Momentele de inerţie ale suprafeţelor plane sunt:

- moment axial de ordinul doi:

$$I_{Ox} = \int_A y^2 \cdot dA \quad I_{Oy} = \int_A x^2 \cdot dA$$

- moment centrifugal faţă de axele xOy

$$I_{xOy} = \int_A x \cdot y \cdot dA$$

- moment de inerţie polar fată de punctul O, la suprafeţe axial simetrice este:

$$I_p = \int_A r^2 \cdot A = \int_A \left(x^2 + y^2\right) \cdot dA = I_{Ox} + I_{Oy}$$

în care r este distanţa de la elementul dA la originea O.

Dacă una dintre axe este axă de simetrie, atunci momentul centrifugal de inerţie este nul.

Formulele lui STEINER

Momentul de inerţie faţă de o axă oarecare este egal cu momentul de inerţie faţă de o axă paralelă, care trece prin centrul de greutate al suprafeţei, plus produsul ariei suprafeţei cu pătratul distanţei între cele două axe (d):

$$I_{Ox} = I_{(Ox)'} + A \cdot d^2$$

Momentul centrifugal faţă de două axe oarecare este egal cu momentul de inerţie centrifugal faţă de axe paralele care trec prin centrul de greutate al suprafeţei, plus produsul ariei cu distanţle între cele două axe:

$$I_{xOu} = I_{(xOy)'} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

Exemple de forţe hidrostatice pentru suprafeţe plane regulate

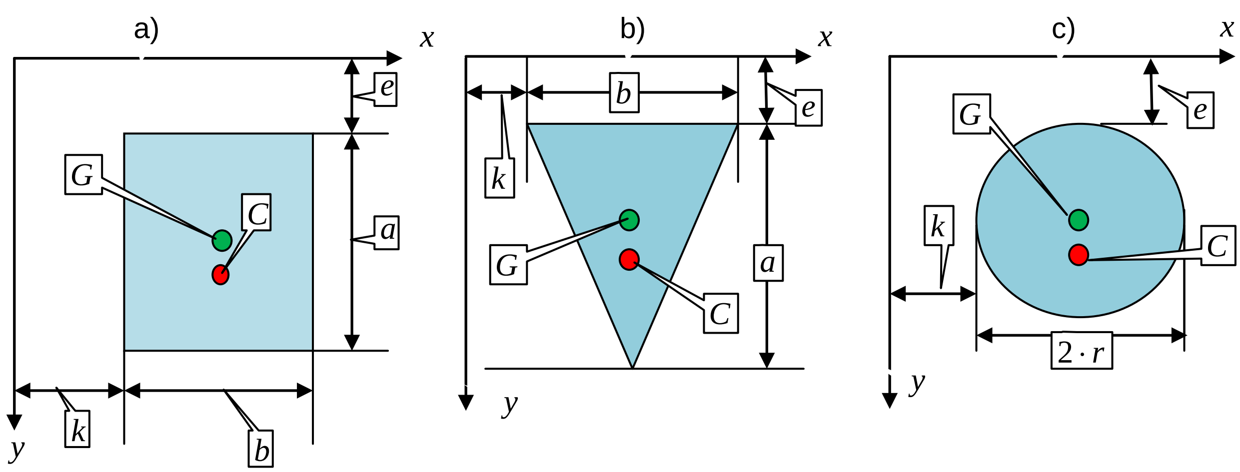


Fig.3.14. *Forţe hidrostatice şi centre de presiune (C) pentru : a) dreptunghi, b) triunghi isoscel; c) cerc (G centru de greutate)*

$$F_p = \gamma \cdot a \cdot b \cdot \left(e + \frac{a}{2}\right) \cdot \sin\alpha \qquad F_p = \frac{1}{6}\gamma \cdot a \cdot b \cdot (3 \cdot e + a) \cdot \sin\alpha \qquad F_p = \gamma \cdot \pi \cdot r^2 \cdot (e + r) \cdot \sin\alpha$$

$$x_C = k + \frac{b}{2} \qquad x_C = k + \frac{b}{2} \qquad x_C = k + r$$

$$y_C = e + \frac{a}{3} \cdot \frac{3 \cdot e + 2 \cdot a}{2 \cdot e + a} \qquad y_C = e + \frac{a}{2} \cdot \frac{2 \cdot e + a}{3 \cdot e + a} \qquad y_C = e + 4 + \frac{1}{r} \cdot \frac{r^2}{e + r}$$

Forţa hidrostatică pe o suprafaţă plană solicitată pe o singură faţă (m. grafică)

Metoda grafică de calcul a forţei hidrostatice are la bază reprezentarea diagramei de presiuni pe suprafaţa pe care se calculează forţa hidrostatică.

Pentru o suprafaţă plană verticală solicitată pe o singură faţă diagrama de presiuni are o formă triunghiulară (fig. 3.15). Forţa hidrostatică exercitată pe o suprafată elemnentară dA este:

$$dF = p \cdot dA = \gamma \cdot z \cdot dA$$

şi are semnificaţia geometrică de volum al unei prisme cu baza dA şi înălţimea $\gamma \cdot z$.

Forţa hidrostatică totală (F)exercitată pe toată suprafaţa ($A = L \cdot H$) se obţine prin însumarea forţelor elementare de pe întreaga suprafaţă:

$$F = \int_A \gamma \cdot z \cdot dA = \int_{W_\gamma} dW_\gamma = W_\gamma$$

şi corespunde ***corpului de presiune*** obţinut prin ridicarea în fiecare punct al suprafeţei A a unui segment de mărime $\gamma \cdot z$, perpendicular pe suprafaţă.

În cazul suprafeţei verticale solicitat pe o singură fată (Fig.2...) corpul de presiune este o prismă triunghiulară cu baza un triunghi dreptunghic cu suprafaţa $S = \dfrac{H \cdot \gamma \cdot H}{2}$ şi înalţimea L, rezultând o forţă totală:

$$\boxed{F = \frac{\gamma \cdot H^2}{2} \cdot L}$$

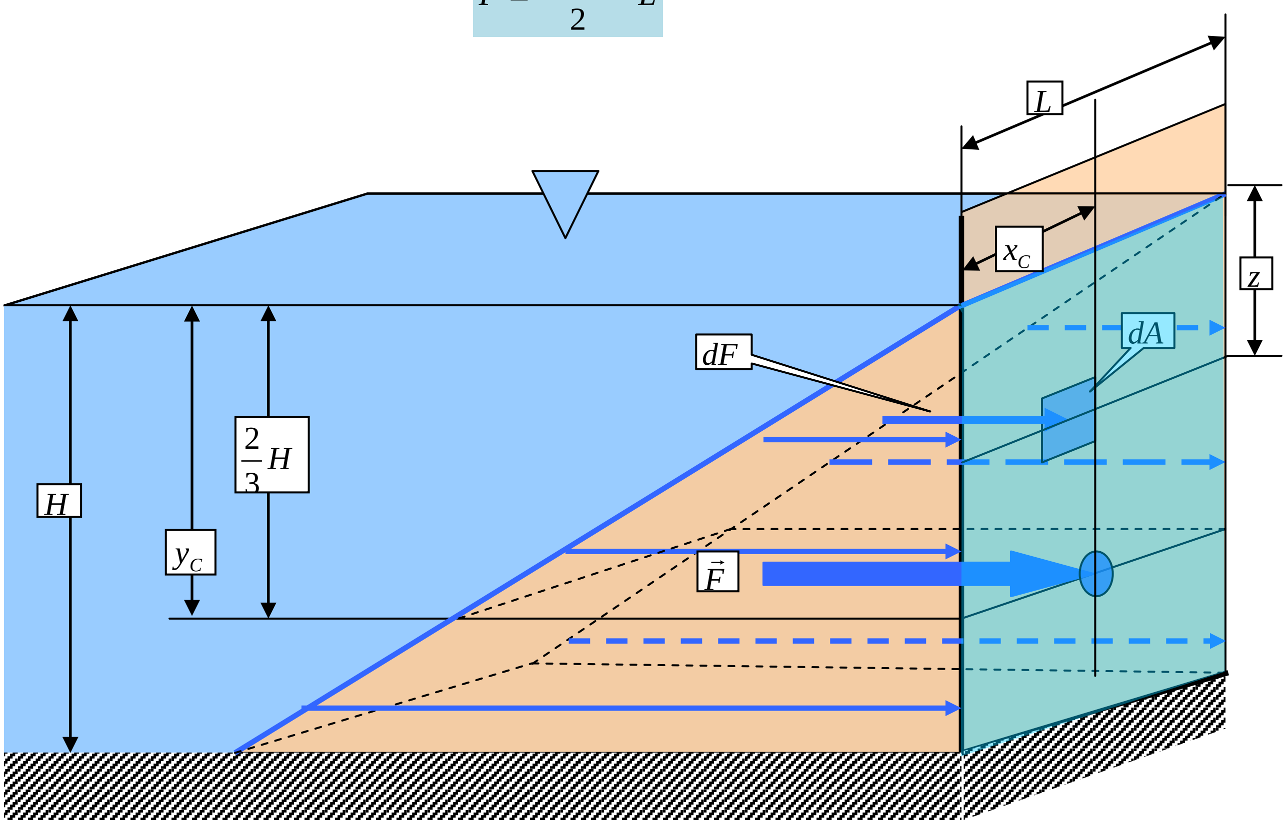


Fig.3.15. *Forţa hidrostatică pe o suprafaţă plană vericală solicitată pe o singură faţă.*

forţă care se aplică la $\frac{2}{3} \cdot H$ de la suprafaţa lichidului.

Forţa hidrostatică se aplică pe în ***centrul de presiune C*** al suprafeţei pe care se exercită. Pentru stabilirea coordonatelor centrului de presiune se scriu ecuaţiile de ***momente*** în raport cu axele de rotaţie ale suprafeţei pe care se exercită presiunea (axa Oz şi axa Ox). În cazul suprafeţei rectangulate verticale $(L \cdot H)$(***Fig.3.15***) :

- $x_C = \frac{L}{2}$ şi $y_C = \frac{2}{3} H$

Forţa hidrostatică pe o suprafaţa plană solicitată pe ambele feţe (m. grafică)

Solicitarea pe ambele feţe ale suprafeţei de lungime $L = 150m$ se realizează de două lichide cu greutăţi volumice diferite: $\gamma_1 = 1{,}0 \frac{tf}{m^3}$ şi $\gamma_2 = 1{,}6 \frac{tf}{m^3}$. Înălţimile coloanei de apă sunt $H_1 = 70m$ şi $H_2 = 40m$. Să se calculeze intensitatea forţei hidrostatice totale şi poziţia punctului de aplicare al acesteia.

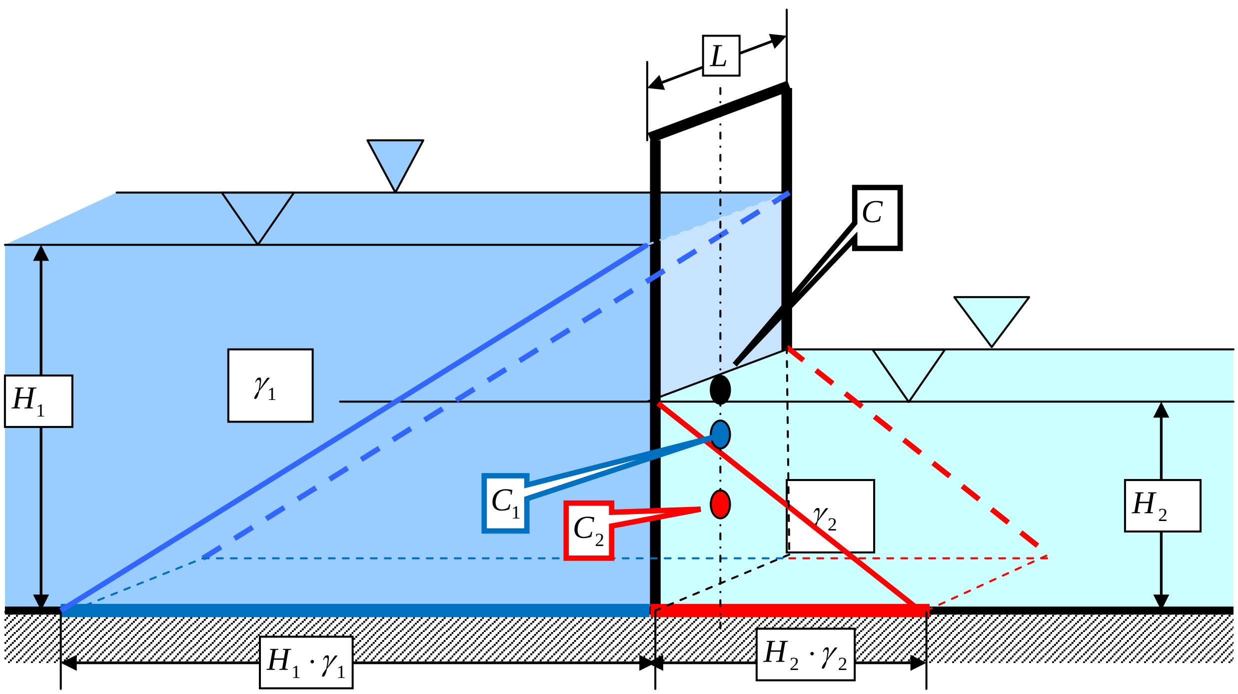


Fig.3.16. *Diagrama presiunilor pe un perete vertical solicitat pe ambele feţe.*

Rezolvare:

Formula de calcul pentru forţa hidrostatică are două componente (Fig.2….):

- ***forţa hidrostatică pe faţă 1, dată de prisma cu baza triunghiulară*** (F_1) formată din lichid cu greutate volumică γ_1 :

$$F_1 = \frac{H_1^2 \cdot \gamma_1}{2} \cdot L$$

cu centrul de presiune C_1 în punctul de coordonate:

$$x_{C_1} = \frac{L}{2} \quad \text{şi} \quad y_{C_1} = \frac{2}{3} \cdot H_1$$

- ***forţa hidrostatică pe faţă 2, dată de prisma cu baza triunghiulară*** (F_2):

$$F_2 = \frac{\gamma_2 \cdot H_2^2}{2} \cdot L$$

cu centrul de presiune C_2 în punctul de coordonate:

$$x_{C_2} = \frac{L}{2} \quad \text{şi} \quad y_{C_2} = \frac{2}{3} \cdot H_2$$

- **rezultanta celor doua forţe este** (F)

$$F = F_1 - F_2 = \frac{L}{2} \cdot \left(H_1^2 \cdot \gamma_1 - H^2{}_2 \cdot \gamma_2\right)$$

cu centrul de presiune C :

$$x_C = \frac{L}{2}$$

şi y_C obţinut din ecuaţia de momente:

$$F \cdot CO = F_1 \cdot C_1O - F_2 \cdot C_2 \cdot O$$

$$CO = \frac{F_1 \cdot C_1O - F_2 \cdot C_2O}{F} = \frac{\frac{L}{2} \cdot H_1^2 \cdot \gamma_1 \cdot \frac{H_1}{3} - \frac{L}{2} \cdot H_2^2 \cdot \gamma_2 \cdot \frac{H_2}{3}}{\frac{L}{2} \cdot \left(H_1^2 \cdot \gamma_1 - H^2{}_2 \cdot \gamma_2\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{H_1^3 \cdot \gamma_1 - H_2^3 \cdot \gamma_2}{H_1^2 \cdot \gamma_1 - H^2{}_2 \cdot \gamma_2}$$

$$y_C = H_1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{H_1^3 \cdot \gamma_1 - H_2^3 \cdot \gamma_2}{H_1^2 \cdot \gamma_1 - H^2{}_2 \cdot \gamma_2}$$

3.5.2. Forţe hidrostatice pe suprafeţe curbe deschise

În cazul unei suprafeţe curbe deschise care mărgineşte un lichid greu aflat în repaus pe fiecare element infinitezimal dS se exercită o fortă hidrostatică elementară $d\vec{F}$, normală la elementul respectiv. Mulţimea forţelor hidrostatice elementare constituie un sistem de forţe oarecare, sistem care nu se reduce la o rezultantă unică, ci la un torsor.

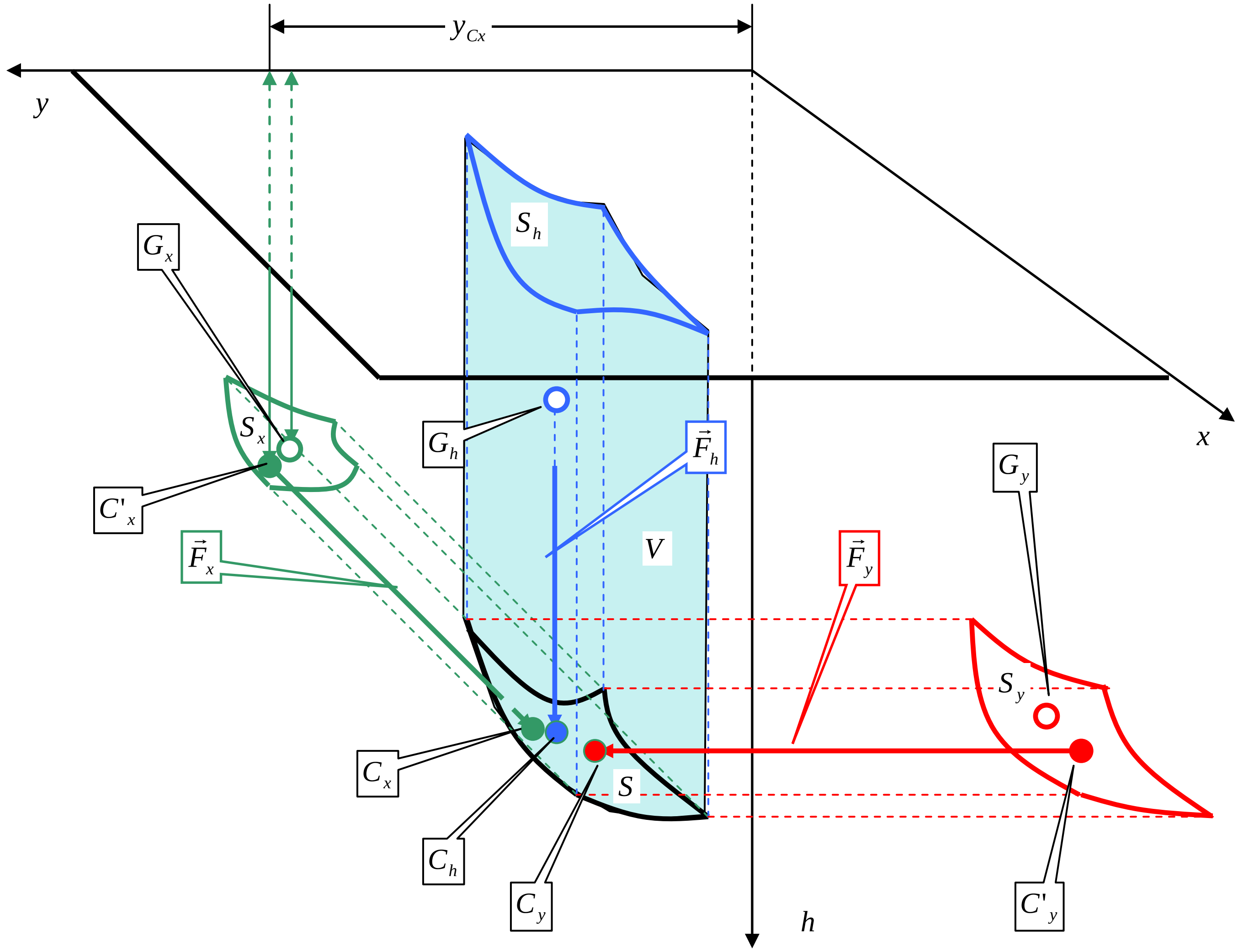


Fig.3.17. *Forţe hidrostatice pe suprafeţe curbe deschise*

Evaluarea forţelor hidrostatice pe suprafeţele curbe deschise se bazează pe descompunerea forţelor elementare după axele triedrului ortogonal $Oxyh$ (***Fig.3.17***):

$$d\vec{F} = dF_x \cdot \vec{i} + dF_y \cdot \vec{j} + dF_z \cdot \vec{k}$$

rezultând ***trei sisteme de forţe paralele***, fiecare sistem reducându-se la o rezultantă:

$$\vec{F}_x = \vec{i} \cdot \int_S dF_x \,; \quad \vec{F}_y = \vec{j} \cdot \int_S dF_y \,; \quad \vec{F}_h = \vec{k} \cdot \int_S dF_h$$

Intensitatea forţelor hidrostatice exercitate de un lichid greu în repaus, într-o direcţie oarecare din ***planul orizontal***, asupra unei suprafeţe curbe care îl mărgineşte, este egală cu intensitatea forţei care se exercită pe proiecţia suprafeţei curbe pe un plan normal la direcţia considerată.

Intensitatea forţei de presiune ***verticală*** exercitată asupra suprafeţei curbe este egală cu intensitatea greutăţii ***cilindrului vertical*** (V) de lichid limitat de suprafaţa curbă, planul suprafeţei libere şi verticalele ca întâlnesc conturul suprafeţei curbe.

Pe elementul de suprafaţă dS de arie dA se exercită forţa de presiune $d\vec{F}$ normală la dS şi având intensitatea:

$$dF = \left(p^* + \gamma \cdot h\right) \cdot dA - p^* \cdot dA = \gamma \cdot h \cdot dA$$

Dacă unghiul dintre normala exterioară la suprafaţă dS şi sensul pozitiv al axei Ox este α, atunci rezultă că:

$$dF_x = dF \cdot \cos\alpha = \gamma \cdot h \cdot dA \cdot \cos\alpha = \gamma \cdot h \cdot dA_x$$

şi ţinând cont de teorema momentelor statice se obţine pentru cele trei rezultante:

$$F_x = \int_S dF_x = \gamma \cdot \int_{S_x} h \cdot dA_x = \gamma \cdot h_{Gx} \cdot A_x$$

$$F_y = \int_S dF_y = \gamma \cdot \int_{S_y} h \cdot dA_y = \gamma \cdot h_{Gy} \cdot A_y$$

$$F_h = \int_S dF_h = \gamma \cdot \int_{S_h} h \cdot dA_h = \gamma \cdot \int_V dV = \gamma \cdot V$$

în care A_x, A_y, A_h sunt ariile proiecţiilor suprafeţei S pe planele Oyh, Oxh respectiv Oxy, V este ***volumul cilindrului vertical*** iar h_{Gx}, h_{Gy} sunt adâncimile centrelor de greutate ale suprafeţelor S_x respectiv S_y.

Forţele de presiune se aplică în ***centrele de presiune*** ale suprafeţei $S\left(C_x, C_y, C_h\right)$ şi pentru determinarea centrului de presiune C_x se aplică teorema lui Varignon:

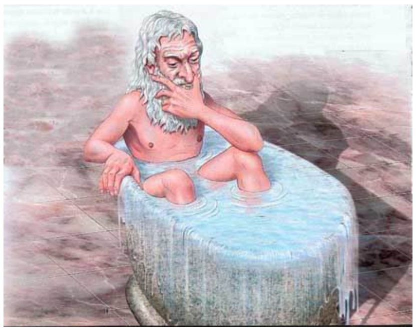
$$y_{C_x} \cdot F_x = \int_S y \cdot dF_x = \int_{S_x} y \cdot \gamma \cdot h \cdot dA_x = \gamma \int_{S_x} y \cdot h \cdot dA_x = \gamma \cdot I_{yh} \Rightarrow y_{C_x} = \frac{I_{yh}}{h_{Gx} \cdot A_x}$$

$$h_{C_x} \cdot P_x = \int_S h \cdot dF_x = \int_{S_x} h \cdot \gamma \cdot h \bullet dA_x = \gamma \int_{S_x} h^2 \cdot dA_x = \gamma \cdot I_y \Rightarrow h_{C_x} = \frac{I_y}{h_{Gx} \cdot A_x}$$

În care I_{yh}, I_y sunt momentul centrifugal al lui S_x în raport cu Oyh, respectiv momentul de inerţie în raport cu axa Oy.

Centrul de presiune C_h se află la intersecţia lui S cu vertical dusă din centrul de greutate al G_h al volumului V.

3.5.3. Forţe hidrostatice pe suprafeţe închise



Teorema lui Archimede: Un lichid greu aflat în repaus exercită asupra unui solid cufundat în el o forţă verticală ascendentă a cărei intensitate este egală cu cea a greutăţii lichidului dezlocuit de solid.

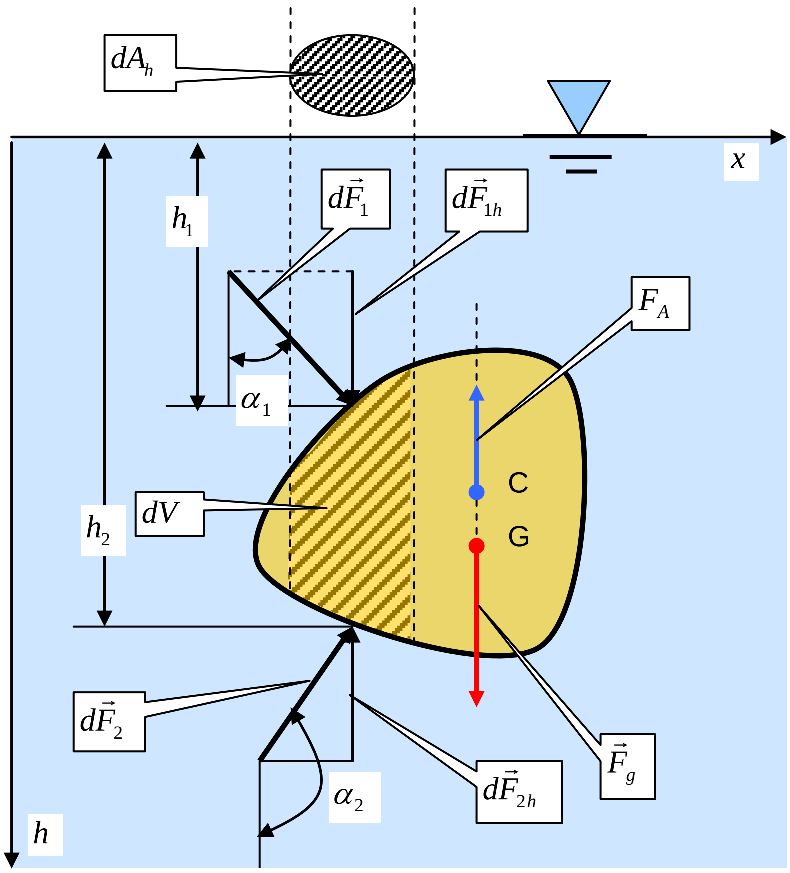


Fig.3.18. *Principiul lui Archimede*

Deoarece în plan orizontal

$$P_x = P_y = 0$$

stabilitatea corpului solid este realizată prin echilibrarea celor doua forţe care acţionează asupra solidului:

- ***forţele hidrostatice*** elementare dF_1, dF_2 care acţionează pe verticală asupra elementelor de suprafaţă dA_1, dA_2 şi care fac cu sensul pozitiv al axei verticale unghiurile α_1, α_2;
- ***forţa masică*** $\vec{F}_g$:

$$dF_{1h} = \left(p_0 + \gamma \cdot h_1\right) \cdot dA_1 \cdot \cos\alpha_1 = \left(p_o + \gamma \cdot h_1\right) \cdot dA_h$$

$$dF_{2h} = \left(p_0 + \gamma \cdot h_1\right) \cdot dA_1 \cdot \cos\alpha_2 = -\left(p_o + \gamma \cdot h_2\right) \cdot dA_h$$

$$dF_h = dF_{1h} + dF_{2h} = -\gamma \cdot \left(h_2 - h_1\right) \cdot dA_h = -\gamma \cdot dV \Rightarrow F_h = -\gamma \int_V dV = -\gamma \cdot V$$

$$F_A = \gamma \cdot V$$

Forţa arhimedică (F_A) se aplică în centrul de greutate C al ***volumului de lichid dezlocuit***.

În funcţie de relaţia dintre ***forţele hidrostatice*** (F_A) care se aplică în centrul de greutate C al ***volumului de lichid dezlocuit*** şi *forţele masice* (F_g) care se aplică în centrul de greutate G al ***solidului imersat***, se disting mai multe situaţii:

- Corpul solid rămâne în repaus dacă:
  - $F_A = F_g$
  - F_A şi au acelaşi suport (C şi G sunt pe aceeaşi vericală)
- Corpul solid urcă pe verticală până ce iese parţial din lichid dacă:
  - $F_g < F_A$
- Corpul solid se scufundă până la fundul bazinului dacă:
  - $F_g > F_A$

Dacă solidul este imersat în lichide de densităţi diferite forţa arhimedică se calculează cu o relaţie de tipul:

$$F_A = \sum_{i=1}^{i=k} \rho_i \cdot g \cdot V_i$$

În care

ρ_i -densitatea fluidului i

g - acceleraţia gravitaţională

V_i - volumul imersat în fluidul de densitate ρ_i

Echilibrul stabil al corpurilor imersate complet în lichide grele în repaus este asigurat dacă centrul de greutate al solidului este situat sub centrul de greutate al volumului de lichid dezlocuit.