# 4. HIDROCINEMATICA

**Hidrocinematica** studiază ***mişcarea fluidelor*** fără a lua în considerare cauzele care o produc, rezultatele ei fiind valabile atât pentru ***lichidele perfecte*** cât şi pentru cele ***vâscoase***.

***Mişcarea fluidelor*** este mişcarea întregului sistem ***continuu*** de particule şi este raportată la ***două sisteme de reprezentare*** spaţială:

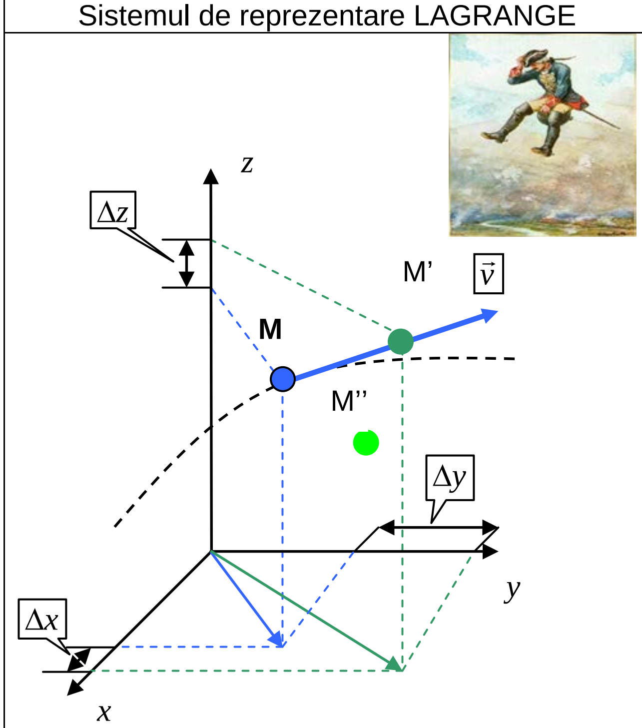
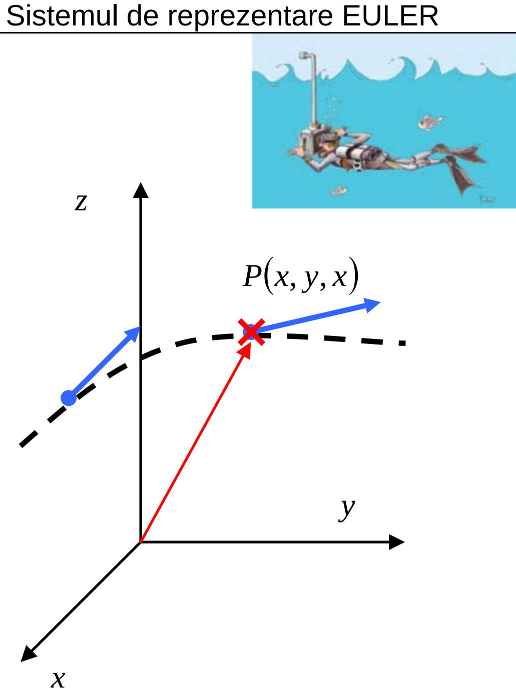
- ***sistemul de reprezentare Lagrange***
- ***sistemul de reprezentare Euler***

***Descriptorii*** mişcării fluidelor sunt:

- ***linie de curent şi tub de curent***
- ***debit volumic, debit masic, debit de greutate***
- ***viteză***
- ***acceleraţie;***

***Modelele matematice*** ale mişcării fluidelor respectă principiile findamentale ale ***conservării*** **masei** şi **energiei**, integrând în ecuaţii corelaţiile dintre : ***proprietăţile fluidelor***, ***descriptorii mişcării*** şi ***forţele*** care acţionează asupra fluidelor.

## *4.1. SISTEME DE REPREZENTARE A MISCARII FLUIDELOR*

<table>
<tr><th>Sistemul de reprezentare LAGRANGE</th><th>Sistemul de reprezentare EULER</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Mărimile fizice cu care se descrie mişcarea (viteză, acceleraţie etc.) sunt ataşate particulelor de fluid (M).</td>
<td>Mărimile fizice cu care se descrie mişcarea (viteză, acceleraţie, presiune, densitate etc.) sunt ataşate punctelor ( $P$ ) din domeniul de curgere.</td>
</tr>
<tr>
<td>Variabilele independente :<br>• $x_0, y_0, z_0$ - coordonatele particulei la momentul iniţial<br>• $t$ - timpul</td>
<td>Variabilele independente :<br>• $x, y, z$ - coordonatele punctelor din domeniul de curgere ;<br>• $t$ - timpul</td>
</tr>
<tr>
<td>Variabilele dependente<br>• $x, y, z$ - coordonatele particulei la diverse momente<br>• $u, v, w$ - vitezele particulei la un anumit moment<br>• $a_x, a_y, a_z$ - acceleraţiile particulei la un moment dat<br>• $p$ - presiunea</td>
<td>Variabilele dependente :<br>• $v$ - viteza locală, egală cu viteza particulei care se află în punctul $P(x, y, z)$ ;<br>• $p$ - presiunea din punctul $P(x, y, z)$</td>
</tr>
<tr>
<td>Exprimarea dependenţei funcţionale<br>• $x = F_1(x_0, y_0, z_0, t)$<br>• $y = F_2(x_0, y_0, z_0, t)$<br>• $z = F_3(x_0, y_0, z_0, t)$<br>sau sub formă vectorială :<br>$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$ unde $\vec{r}_0 = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} + z_0 \cdot \vec{k}$<br>• $v_x = \frac{\partial x}{\partial t}; v_y = \frac{\partial y}{\partial t}; v_z = \frac{\partial z}{\partial t}$<br>• $a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}; a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}' a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$<br>• $a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t}; a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t}' a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t}$<br>• $p = p(x, y, z)$</td>
<td>Exprimarea dependenţei funcţionale<br>(a vitezei particulelor care trec prin acelaşi punct fix din spaţiul ocupat de fluid)<br>• $v_x = f_1(x, y, z, t)$<br>• $v_y = f_2(x, y, z, t)$<br>• $v_z = f_3(x, y, z, t)$<br>• $p = p(x, y, z, t)$<br><br>Dacă se consideră traiectoria unei particule, în sistemul Euler, vitezele se determină ca derivate totale ale funcţiilor $x, y, z$, deoarece creşterile lui $x, y, z$, reprezentând deplasarea particulei sunt în funcţie de timp şi componentele vitezei:<br><br>• $v_x = \frac{dx}{dt}; v_y = \frac{dy}{dt}; v_z = \frac{dz}{dt}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Relaţii de trecere de la sistemul de coordonate LANGRANGEAN la cel EULERIAN<br>• $Dx = v_x \cdot dt$<br>• $Dy = v_y \cdot dt$<br>• $Dz = v_z \cdot dt$<br>în care $Dx, Dy, Dz$ reprezintă componentele drumului elementar al particulei, $x, y, z$ fiind coordonatele particulei din sistemul Lagrange, semnalat prin notaţia diferenţială $D$.</td>
</tr>
<tr>
<td>Acceleraţia LAGRANGEANA<br>$a_x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$</td>
<td>Acceleraţia EULERIANA<br>Acceleraţia particulei care se află în punctul $P(x, y, z)$ nu poate fi calculată ca derivată totală a vitezei în raport cu timpul pentru că înainte şi după momentul $t$ în punctul $P(x, y, z)$ este altă particulă cu</td>
</tr>
</table>

$$a_y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$a_z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

altă viteză $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

Soluţia este introducerea ***derivatei substanţiale*** a vitezei locale (derivata totală) care se stabileşte astfel:

- Se scrie ***diferenţiala totală*** a vitezei locale în punctul $P$ :

$$d\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz$$

în care

- primul termen, ***diferenţiala temporală,*** reprezintă ***variaţia vitezei în timp***, aceeaşi pentru toate punctele din vecinătatea punctului $P$;
- următorii trei termeni, ***diferenţiala direcţională***, reprezintă ***variaţia locală a vitezei***, în jurul lui $P$, la $t = const.$, după un drum oarecare, altul decât al particulei (***MM"***)

- în diferenţiala totală se înlocuieşte ***variaţia locală*** a vitezei cu ***diferenţiala direcţională*** în timpul $dt$ după parcursul particulei M pe traseul MM', relaţie în care $x, y, z$ reprezintă coordonatele particulei de fluid din sistemul lagrangean de reprezentare:

$$D\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt + \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot Dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \cdot Dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot Dz \right)$$

- se face trecerea la variabilele Euler ţinând seama de relaţiile de mai sus, $Dx = v_x \cdot dt$ , $Dz = v_z \cdot dt$ $Dy = v_y \cdot dt$ şi se obţine derivata substanţială a vitezei locale cu două componente:

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

- acceleraţia locală: $\vec{a}_l = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$
- acceleraţia spaţială: $\vec{a}_s = v_x \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$

cu cele trei componente:

- $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z}$
- $a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z}$
- $a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}$

Acceleraţia poate fi scrisă mai compact utilizând operatorul nabla:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$$