5.1. DINAMICA FLUIDELOR PERFECTE (ec. Euler)

Studiul mişcării fluidelor este simplificat prin introducerea noţiunii de ***fluid perfect***, adică fluid ***greu (*** $\rho \cdot g > 0$ ***)*** fără ***vâscozitate (*** $\mu = 0$ ***)***.

Ecuaţiile dinamicii fluidelor perfecte se deduc pe baza echilibrului dinamic dintre **forţele** care acţionează asupra particulei de fluid în mişcare şi care sunt reprezentate prin:

- ***fortele masice***
- ***forţele de presiune***
- ***forţele de inerţie*** generate de acceleraţia particulelor de fluid

Dinamica fluidelor perfecte presupune ca şi la fluidele în repaus, numai eforturi unitare normale de ***compresiune***, egale în toate direcţiile, fiind exprimate cantitativ prin mărimea scalară numită ***presiune hidrodinamică***.

Considerăm o ***particulă elementară*** de fluid în mişcare, de formă prismatică, pentru care ecuaţiile de mişcare se vor scrie prin proiecţii pe cele trei axe ale sistemului de referinţă cartezian (***Fig.5.1.***).

Acţiunea fluidului asupra particulei elementare de fluid se înlocuieşte prin forţele de legătură, reprezentate prin ***forţele de presiune*** pe fiecare faţă, distribuite ***uniform***, ipoteză acceptabilă datorită suprafeţelor mici ale particulei.

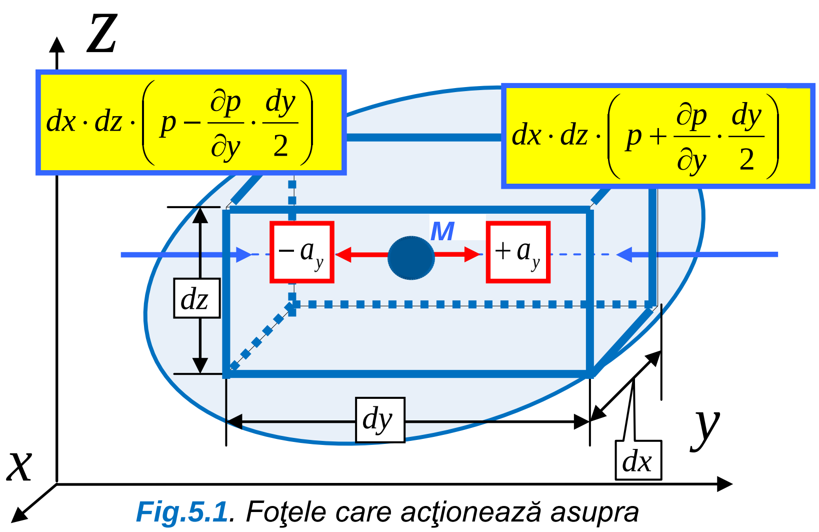

Fig.5.1. *Foţele care acţionează asupra particulei M*

Definim ***presiunea*** şi ***viteza locală*** în centrul particulei (***M***) prin relaţiile:

$$p = p(x, y, z, t) \text{ şi } \vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

Conform ***principiului al doilea al mecanicii***, mişcarea particulei elementare de fluid se produce sub acţiunea ***forţelor exterioare*** care sunt egale cu derivata ***impulsului*** în raport cu timpul (sau produsul dintre ***masa*** şi ***acceleraţie***):

$$\vec{a} \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \vec{F}_e$$

care proiectată pe axa Oy devine:

$$a_y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = F_{ey}$$

în care

a_y - acceleraţia particulei elementare de fluid, parale cu axa Oy;

dx, dy, dz - dimensiunile particulei elementare de fluid;

F_{ey} - ***forţele exterioare*** proiectate pe axa Oy, forţe care sunt reprezentate prin:

- ***Forţele masice*** care acţionează asupra particulei (f_y -forţa masică unitară):

$$\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot f_y = F_{ey1}$$

- ***Forţele de legătură*** (forţele de presiune hidrodinamică)

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}\right) \cdot dx \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}\right) \cdot dx \cdot dz = F_{ey2}$$

Relaţia de echilibru a forţelor care acţionează asupra particulei elementare de fluid în mişcare, pe direcţia axei Oy este:

$$\boxed{F_{ey1} + F_{ey2} = F_{ey}}$$

$$\rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot f_y + \left(p - \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}\right) \cdot dx \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2}\right) \cdot dx \cdot dz = a_y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

care după efectuarea reducerilor devine:

$$(Oy):\ f_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = a_y$$

Procedând similar şi pentru celelalte axe ale sistemului cartezian de referinţă şi introducâd ***derivata substanţială a vitezei locale*** se obţin ecuaţiile lui Euler pentru un fluid ideal:

$$\boxed{\begin{aligned}
(Ox):\ f_x - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = a_x = \frac{Dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} \\
(Oy):\ f_y - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = a_y = \frac{Dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} \\
(Oz):\ f_z - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = a_z = \frac{Dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned}}$$

Pentru a ajunge la ***forma vectorială*** a ecuaţiilor lui Euler se procedează succesiv:

- o înmulţim ecuaţiile cu $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ pentru axele Ox, Oy, Oz
- o adunăm ecuaţiile pe cele trei axe termen cu termen;
- o pentru forţele masice ($\vec{F}$) se ia în considerare ***potenţialul gravitaţional***:

$$\boxed{-U = g \cdot z + const.}$$

$$\vec{i} \cdot f_x + \vec{j} \cdot f_y + \vec{k} \cdot \vec{f}_z - \frac{1}{\rho} \cdot \left(\vec{i} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{D}{Dt} \left(\vec{i} \cdot v_x + \vec{j} \cdot v_y + v_z \cdot \vec{k} \right)$$

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} grad(p) = \frac{D\overline{V}}{Dt}$$

$$-g \cdot grad(z) - \frac{1}{\rho} \cdot grad(p) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}$$

Ţinând seama că $grad\left(\frac{v^2}{2}\right) = \vec{v} \times rot(\vec{v}) + (\vec{v}\nabla)\vec{v}$ ecuaţia lui Euler devine :

$$-g \cdot grad(z) - \frac{1}{\rho} \cdot grad(p) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + grad\left(\frac{v^2}{2}\right) - \vec{v} \times rot(\vec{v})$$

în care pentru ***mişcare irotaţională şi nepermanentă a unui fluid incompresibil*** ($rot(\vec{v}) = 0$ şi $\rho = const.$) ecuaţia anterioară devine:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = grad\left(g \cdot z + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right)}$$

Pentru ***mişcare staţionară*** ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$) a unui fluid greu, cu ***vâscozitate zero*** ($\mu = 0$) şi ***incompresibil*** (http://www.ahgr.ro/media/153271/1.2_deformabilitatea.pdf) ecuaţia lui Euler, prin integrare, conduce la ***ecuaţia fundamentală a lui Bernoulli*** (http://www.ahgr.ro/media/156391/4.3_principii-fundamentale-ale-miscarii-fluidelor.pdf) ecuaţie stabilită pentru prima dată de Daniel Bernoulli în 1738, pe o cale directă, înainte ca Euler să fi stabilit ecuaţiile generale ale mişcării particulei fluide perfecte:

$$\boxed{z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2 \cdot g} = const.}$$