5.2. DINAMICA FLUIDELOR REALE

Starea de tensiune în cazul fluidelor ***vâscoase*** în mişcare este dată de:

- ***eforturi tangenţiale*** determinate de:
  - ***vâscozitate*** (http://www.ahgr.ro/media/153298/1.4_vascozitate.pdf)
  - ***turbulenţă*** (http://www.ahgr.ro/media/153361/1.4.2_reynolds.pdf)
- ***eforturi normale*** datorate ***presiunilor normale*** (http://www.ahgr.ro/media/154976/2.2_fortele-care-actioneaza-intr-un-lichid.pdf)

şi este reprezenată printr-un ***tensor de forma:***

$$P = \begin{Bmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{Bmatrix}$$

în care se consideră ***pozitive*** componentele definite pe o faţă pozitivă (normală pe direcţiile $\vec{i}$, $\vec{j}$ sau $\vec{k}$) şi îndreptate în sensul pozitiv al axelor.

Tensorul eforturilor unitare se caracterizeaz prin:

- ***eforturile tangenţiale*** simetrice fată de diagonala principală sunt egale ($p_{ij} = p_{ji}$)
- ***suma eforturilor normale*** (componentele plasate pe diagonala principală) este invariantă la orientarea sistemului de axe, exprimă gradul de ***comprimare*** al fluidelor pe care starea de tensiune îl dezvoltă în punctul M şi poate fi exprimat prin ***presiunea hidrodinamică***:

$$p(M) = -\frac{1}{3} \cdot (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz})$$

care pentru o stare de tensiune izotropă are tensorul:

$$P_0 = \begin{Bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Bmatrix}$$

Starea de tensiune generată de prezenţa eforturilor tangenţiale (P') se obţine prin scăderea din tensorul stării generale de tensiune (P) a tensorului presiunii hidrodinamice (P_0):

$$P' = P - P_0 = \begin{Bmatrix} p'_{xx} + p & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p'_{yy} + p & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p'_{zz} + p \end{Bmatrix}$$

Eforturile normale ale stării de tensiune P' rezultă din relaţiile:

$$p'_{xx} = p_{xx} + p$$

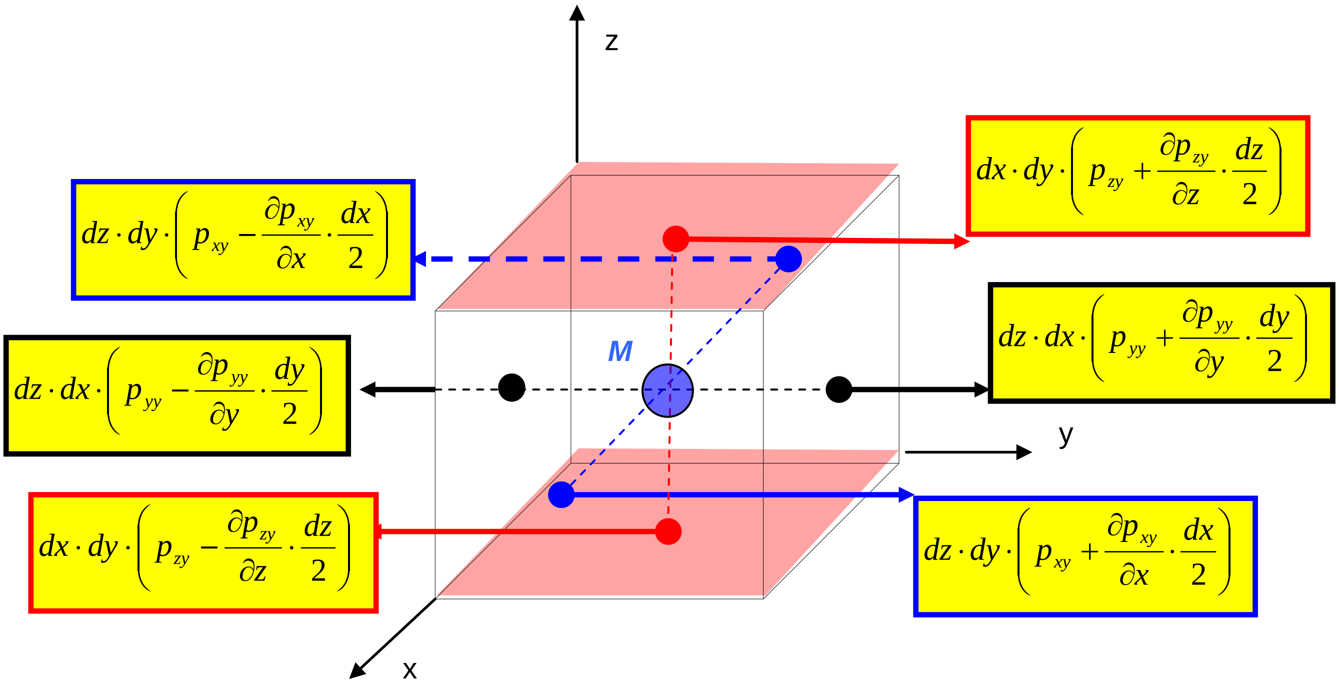

Fig.5.2. *Forţele de legătură (F_{ey_2}) care acţionează asupra unei particule de fluid real în mişcare*

Considerăm o particulă elementară prismatică de fluid real aflată în mişcare cu centrul în M pentru care definim (***Fig.5.2.***):

- viteza: $\vec{v} = \vec{v}(M, t)$
- eforturile unitare: $\vec{p}_n = \vec{p}_n(M, \vec{n}, t)$

Conform ***principiului al doilea al mecanicii***, mişcarea particulei elementare de fluid se produce sub acţiunea ***forţelor exterioare*** care sunt egale cu derivata ***impulsului*** (http://www.ahgr.ro/specialisti/daniel-scradeanu/2_hidraulica/30_suport-pentru-aplicatii/33_impusul.aspx) în raport cu timpul (sau produsul dintre masa şi acceleraţie):

$$\vec{a} \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \vec{F}_e$$

care proiectată pe axa Oy devine:

$$a_y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = F_{ey}$$

în care

a_y - acceleraţia particulei elementare de fluid, parale cu axa Oy ;

dx, dy, dz - dimensiunile particulei elementare de fluid;

F_{ey} - ***forţele exterioare*** proiectate pe axa Oy, forţe care sunt reprezentate prin :

- ***Forţele masice*** care acţionează asupra particulei (f_y -forţa masică unitară):

$$F_{ey1} = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot f_y$$

- ***Forţele de legătură*** (forţele de presiune hidrodinamică notate dupa următoarele reguli:
    - ***primul indice*** este cel al axei perpendiculare pe planul în care se află proiectată forţa de presiune
    - ***al doilea indice*** este cel al axei cu care este paralelă forţă de presiune)

$$\begin{aligned} F_{ey2} &= \left(-p_{yy} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} + p_{yy} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} \right) \cdot dx \cdot dz + \\ &+ \left(-p_{zy} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} + p_{zy} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} \right) \cdot dx \cdot dy + \\ &+ \left(-p_{xy} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} + p_{xy} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} \right) \cdot dy \cdot dz = \\ &= \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \end{aligned}$$

Relaţia de echilibru a forţelor care acţionează asupra particulei elementare de fluid real (cu vâscozitate) în mişcare, ***pe direcţia axei*** Oy este:

$$\left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot f_y = a_y \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

care după simplificare şi împărţite prin ρ devine:

$$(Oy):\ f_y + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) = a_y = \frac{Dv}{Dt}$$

Procedând similar şi pentru celelalte axe ale sistemului cartezian de referinţă şi introducâd ***derivata substanţială a vitezei locale*** se obţin ecuaţiile generale ale ***mişcării fluidelor reale*** în funcţie de eforturile unitare.

$$\begin{aligned} (Ox)&:\ f_x + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z} \right) = a_x = \frac{Dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ (Oy)&:\ f_y + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial z} \right) = a_y = \frac{Dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ (Oz)&:\ f_z + \frac{1}{\rho} \cdot \left(\frac{\partial p_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) = a_z = \frac{Dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{aligned}$$

Din sistemul de ecuaţii diferenţiale proiectate pe cele trei axe ale sistemului de referinţă se deduc ecuaţii pentru: mişcarea fluidelor vâscoase în regim laminar şi în regim turbulent

5.2.1. Ecuaţiile mişcării fluidelor vâscoase în regim laminar

Ecuaţiile mişcării fluidelor vâscoase în regim laminar (ec. Navier-Stokes) se deduc prin aplicarea ***legii a doua a lui Newton*** la mişcarea ***fluidelor newtoniene*** admiţându-se ipoteza că ***tensiunea*** fluidului este proporţională cu ***gradientul vitezei*** şi al ***presiunii***.

Se înlocuiesc, în ecuaţiile generale ale mişcării fluidelor reale, eforturile unitare de ***vâscozitate*** prin ***vitezele locale de deformare*** ale particulei de fluid utilizând relaţia lui Newton:

$$\boxed{\tau = \mu \cdot \frac{dv}{dn}}$$

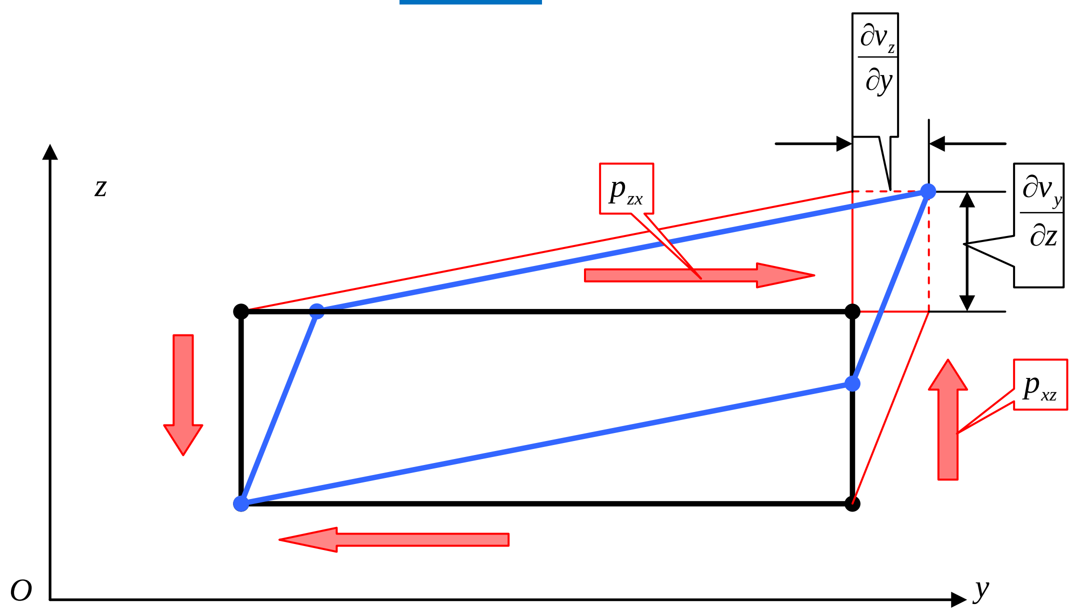

Fig.5.3. *Deformarea particulei sub acţiunea eforturilor tangenţiale datorate vâscozităţii În planul yOz*

Relaţiile dintre deformaţii şi eforturi la fluide sunt analoage cu cele de la solide, deformaţiile fiind proporţionale cu variaţiile vitezelor locale, raportate la axele pe care sunt proiectate (***Fig.5.3*** pentru planul yOz: $s_{yz} + s_{zy} = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}$). ***Tensorui eforturilor unitare*** devine:

$$\boxed{P = \begin{Bmatrix} 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \mu \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \mu \cdot \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) & 2 \cdot \mu \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{Bmatrix}}$$

Ecuaţiile generale ale mişcării fluidelor reale, în funcţie de deformaţiile introduse sub acţiunea vâscozităţii devin:

$$(Oy):\ f_y - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}\cdot\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)+2\cdot\frac{\partial}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\cdot\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right)\right]=\frac{Dv}{Dt}$$

şi mai departe:

$$(Oy):\ f_y - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\cdot\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)+\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}\cdot\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=\frac{Dv}{Dt}=a_y$$

în care $\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=div\vec{V}=0$ datorită ***continuităţii*** în fluidele incompresibile, ajungându-se în final la forma:

$$(Oy):\ f_y - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\cdot\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\cdot\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\cdot\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\cdot\frac{\partial v_y}{\partial z}$$

în care:

- forţele masice: f_y -
- gradientul presiunii (componentă a divergenţei tensiunii): $\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}$
- efectul vâscozităţii (componentă a divergenţei tensiunii): $\frac{\mu}{\rho}\cdot\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)$ -
- acceleraţia nestaţionară (componentă a inerţiei): $\frac{\partial v_y}{\partial t}$
- acceleraţia convectivă (schimbarea de direcţie): $v_x\cdot\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\cdot\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\cdot\frac{\partial v_y}{\partial z}$ -

Grupând ecuaţiile pentru cele ***trei axe*** se obţin ecuaţiile lui Navier-Stokes pentru fluide grele, vâscoase şi incompresibile:

$$(Ox):\ f_x - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\cdot\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial v_x}{\partial t}+v_x\cdot\frac{\partial v_x}{\partial x}+v_y\cdot\frac{\partial v_x}{\partial y}+v_z\cdot\frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$(Oy):\ f_y - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\cdot\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial v_y}{\partial t}+v_x\cdot\frac{\partial v_y}{\partial x}+v_y\cdot\frac{\partial v_y}{\partial y}+v_z\cdot\frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$(Oz):\ f_z - \frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\cdot\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_x\cdot\frac{\partial v_z}{\partial x}+v_y\cdot\frac{\partial v_z}{\partial y}+v_z\cdot\frac{\partial v_z}{\partial z}$$