3.2.REDUCEREA ERORILOR

Toate informațiile obținute din rețelele de cercetare au ca obiectiv *reducerea incertitudinilor* în legãturã cu distribuția spațialã a parametrilor mãsurați (ex.: în *aer*: SO_2, NO_2, pulberi sedimentabile etc.; în *apele de suprafață*: NO_3, NH_4, pH, temperaturã etc.; în *sol*: conținut în substanțe organice sau substanțe poluante, etc.; în *subsol*: conținutul în metale al filoanelor, conținutul în substanțe poluante al apelor subterane etc.). Reducerea incertitudinilor implicã metodologic teoria *bayesianã* şi *entropia* proceselor aleatoare, motiv pentru care criteriile care stau la baza proiectãrii rețelelor de cercetare sunt: *minimizarea entropiei* şi *reducerea erorilor de interpolare*.

Utilizarea entropiei este singurul mijloc de a cuantifica incertitudinea globalã relativã la variabilele mãsurate în rețele de monitoring pe baza legilor de distribuție identificate experimental (prin metode de calare a modelelor teoretice).

În condițiile utilizãrii entropiei criteriul de optimizare a rețelelor de monitoring este minimizarea acesteia.

Entropia

Entropia reprezintã reducerea incertitudinii unui *eveniment* care se produce cu *probabilitatea p*:

$$H = -\log(p) \tag{3.40}$$

Entropia este *aditivã* când este aplicatã intersecției a douã *evenimente independente*:

$$H = p(-\log p) + (1-p)[-\log(1-p)] \tag{3.41}$$

Cele douã evenimente pot fi douã distribuții punctuale cu probabilitãțile *p* şi *(1-p)* şi această definiție poate fi extinsã la distribuția mai multor puncte (ex.: punctele de probare ale rețelei de cercetare).

Entropia este definitã strict pozitiv pentru un set de valori discrete de volum finit. Ea este maximã pentru o distribuție uniformã a acestora (cu aceeaşi probabilitate şi lege de distribuție). Considerând o serie de valori infinit apropiate, utilizându-se *integrala* în locul *sumei* şi *funcția densitãții de probabilitate* în locul *probabilitãților*, se defineşte o entropie analoagã sub forma:

$$H(V)' = E[-\log f(V)] \tag{3.42}$$

Analogia cu mediul discret nu este satisfãcãtoare deoarece nu este invariantã la transformãrile realizate asupra variabilei aleatoare *V*, *funcția densitãții de probabilitate* fiind exprimatã în *unitãți de probabilitate* raportate la *unitãți de V*. Pentru uniformizare dimensionalã este propusã (Jaynes,1968) forma:

$$H(V) = E[-\log f(V)/m(V)] \tag{3.43}$$

în care *m(V)* este o mãsurã a "ignoranței complete " asupra variabilei *V*. Utilizatã în această formã, cu toate ambiguitãțile introduse de alegerea lui *m(V)* entropia îşi pãstrează proprietatea de *aditivitate* dar şi-o pierde pe cea de *pozitivitate*. Ca o mãsurã

a incertitudii în mediul continuu este utilizatã valoarea absolutã a entropiei calculate cu formula lui Jaynes.

Entropia reţelei de monitoring

Abordarea studiului *entropiei reţelei de monitoring* porneşte de la ipoteza cã datele furnizate de aceasta pentru cartografierea unor parametri sunt dintr-un spaţiu *aleator* generat de un proces natural.

Pentru a simplifica reprezentarea ne putem imagina acest spaţiu aleator bidimensional, în el fiind dispersate valorile parametrului mãsurate în staţiile reţelei de monitoring.

Toate valorile mãsurate se considerã *reprezentative* pentru fenomenul monitorizat, dar nu toate locaţiile investigate prin mãsurãtori candidează pentru funcţia de *staţii permanente în reţeaua de monitoring*. Densitatea staţiilor de mãsurare este limitatã din considerente practice (costul execuţiei şi al mãsurãtorilor executate). Minimizarea entropiei vizeazã stabilirea numãrului minim de staţii permanente din reţea.

Fie *X vectorul aleator* ale cãrui coordonate reprezintã valorile câmpului spaţial în diferitele puncte ale reţelei de monitoring, ordonate dupã un criteriu rezonabil.

Staţiile stabile ale reţelei de monitoring vor fi selectate dintre aceste puncte disponibile iar problema proiectantului este identificarea acelora care trebuie mãsurate.

Pentru aceastã operaţiune partiţia vectorului *X* poate fi reprezentatã sub forma:

$$X = (U,G) \tag{3.44}$$

în care

U - reprezintã valorile variabilei în punctele nemonitorizate (staţii nepermanente);

G - reprezintã valorile variabilei în puncte monitorizate permanent.

Pentru a simplifica notaţiile se va nota cu $f(U,G)$ funcţia densitãţii de probabilitate condiţionatã a variabilei $X = (U,G)$ şi cu $m(U,G)$ mãsura *completei ignoranţe*. Presupunând cã $m(G)$ este specificat, atunci :

$$m(U|G) = m(U,G)/m(G) \tag{3.45}$$

Pentru un anumit proces stocastic, incertitudinea asupra reţelei de monitoring se exprimã prin entropia variabilei *X*:

$$H(X) = H(U|G) \tag{3.46}$$

care se descompune în :

$$H(U,G) = H(U|G)+H(G) \tag{3.47}$$

în care

$$H(U|G) = E[-\log f(U|G)/m(U|G)] \tag{3.48}$$

Pentru a interpreta aceastã decompoziţie, presupunem cã valorile *G* au fost obţinute şi în aceste condiţii incertitudinea asupra valorilor *U* este :

$$H(U) = E[-\log f(U|G)/m(U|G)|G] \tag{3.49}$$

Deoarece G nu este cert, incertitudinea realativã la U este primul termen în decompoziția entropiei $H(X) = H(U,G)$:

$$H(U|G) = E\{E[-\log f(U|G)/m(U|G)|G]\} \tag{3.50}$$

deci

$$H(X) = H(U,G) = E\{E[-\log f(U|G)/m(U|G)|G]\} + E[-\log f(G)/m(G)] \tag{3.51}$$

Strategia proiectãrii derivã din decompoziția entropiei $H(X)$. Minimizarea incertitudinii se realizeazã prin minimizarea termenului $H(U|G)$ sau maximizarea teremenului $H(G)$.

Maximizarea termenului $H(G)$, care reprezintã incertitudinea apriori asupra lui G, poate fi eliminatã prin monitorizare. Este atunci uşor de intuit cã acest termen poate fi maximizat printr-o partiție corespunzãtoare a lui X, maximizându-se astfel beneficiul mãsurãtorilor executate.

Se demonstrează cã:

$$H(U|G) = E[-\log f(U|G)/m(U|G)] < E[-\log f(U)/m(U)] = H(U) \tag{3.52}$$

În aceste condiții, obținând G prin mãsurãtori niciodatã nu va avea loc o creştere a incertitudinii asupra partiției U. Presupunând $m(U|G) = m(U)$ rezultã:

$$H(U|G) = H(U) - I(U;G) \tag{3.53}$$

în care informația mutualã în U şi G este strict pozitivã, simetricã şi definitã de relația:

$$I(U;G) = E\{\log[f(U,g)/(f(U)f(G)]\} \tag{3.54}$$

Obiectivul minimizãrii entropiei se realizeazã în contextul instalãrii unei noi rețele sau al extinderii uneia existente. În ambele cazuri, efectul unui număr restrâns de puncte mãsurate suplimentar, repartizate pe întreaga suprafață monitorizatã, este minim asupra reducerii entropiei. În acelaşi timp potențialul de inferență al partiției U din G devine de criticã importanță atâta timp cât rețeaua de monitoring este utilizatã repetat în acest scop.

Criteriul postulat pentru reducerea incertitudinii asupra lui U obținutã prin G este maximizarea informației mutuale I care ignorã consecințele entropiilor $H(U)$ şi $H(G)$ în partiționarea vectorului X :

$$H(U) - H(U|G) = I(U;G) = I \tag{3.55}$$

Posibilitatea includerii în U a valorilor cu incertitudine mare este admisã pe baza posibilitãții comode de a fi deduse din G. Aceastã aproximare este strâns legatã de teoria transmiterii informației a lui *Shannon*.

Situaţia cu care ne confruntăm deseori în monitorizarea unui proces este cea a unei reţele de observaţie existente, interesul fiind acela de a elimina staţiile de observaţie care aduc o cantitate redusă de *informaţie utilă*.

Deoarece reţelele sunt constituite, în general, dintr-un număr redus de puncte, incertitudinea conţinută în $H(G)$ reprezintă o fracţiune semnificativă din cea totală ($H(X)$) şi maximizând $H(G)$ minimizăm $H(U|G)$.

În practică, modelele stocastice necesare pentru calculul diferitelor probabilităţi vor fi ele însele incerte. Multe teorii statistice sunt elaborate pentru evaluarea şi descrierea acestei incertitudini sub forma unui vector "θ". Se poate încorpora în mod direct această incertitudine a modelului în incertitudinea asupra distribuţiei procesului analizat sub forma:

$$H(U,G,\theta) = H(U,G|\theta) + H(\theta) \tag{3.56}$$

$H(\theta)$ - incertitudinea asupra parametrilor modelului stocastic utilizat;
$H(U,G,\theta)$ - incertitudinea totală a variabilei X.

In studiul reţelelor de monitoring se pleacă de cele mai multe ori de la un set de date minim. Toate probabilităţile şi entropiile calculate sunt condiţionate de reprezentativitatea şi corectitudinea acestuia.

<u>Entropiile instrumentale</u>

Toate formele de erori de măsurare trebuie luate în considerare la proiectarea reţelelor de monitoring deşi în mod surprinzător sunt reţele care nu dispun de măsurători de verificare (duble).

Incertitudinea asupra variabilei $X = (U,G)$ este cea care interesează în principal iar G, presupusă a fi furnizată de reţea, este importantă pentru definirea procesului optim de măsurare. Operaţiunea de măsurare induce erori iar măsurătorile duble sunt utilizate pentru evaluarea mărimii acestora.

Fie D vectorul tuturor măsurătorilor disponibile executate în punctele care formează variabila G. Reducerea incertitudinii datorată vectorului D este:

$$H(U,G,\theta) - H(U,G,\theta|D) = H(G) - H(G|D) \tag{3.57}$$

cu măsura *ingnoranţei complete*:

$$m(U,G,\theta|D) = m(U,\theta|G)m(G|D) \tag{3.58}$$

Atât timp cât $H(U,G,\theta)$ este constantă şi independentă de alegerea procesului de măsurare a variabilei G şi de modul de partiţionare (U,G), se deduce că $H(U,G,\theta,|D)$ poate fi minimizată prin combinaţia modului de alegere a procesului de măsurare (G) şi de partiţionare a variabilei X.

În general $f(U,\theta|G,D) = f(U,\theta|G)$ şi dacă $m(U,G,\theta|D) = m(U,\theta|G)m(G|D)$ rezultă că:

$$H(U,G,\theta|D) = H(U,\theta|G) + H(G|D) \tag{3.59}$$

Alegerea metodei de măsurare afectează numai termenul al doilea ($H(G|D)$) în timp ce *alegerea reţelei* (partiţia variabilei X) afectează ambii termeni. În mod ideal alegerea reţelei şi procesului de obţinere a datelor trebuie să se facă simultan. Procesul de *măsurare* trebuie să includă desemnarea *laboratoarelor de analiză*. Calitatea datelor poate depinde nu numai de laboratorul în care se execută analiza ci şi de durata transportului probei până la laborator. Cu alte cuvinte, *mărimea erorilor* poate depinde de *distanţa dintre staţia monitorizată şi poziţia laboratorului*.

Dacă $m(D|G) = m(G|D)m(D)/m(G)$ atunci

$$H(G|D) = H(G) - [H(D) - H(D|G)] \tag{3.60}$$

relaţie care exprimă faptul că o bună cunoaştere a variabilei G reduce substanţial incertitudinea asupra distribuţiei variabilei X.

Normalitatea multivariată

Transformate în mod adecvat multe serii de date au distribuţii care pot fi aproximate printr-o *distribuţie gaussiană*, distribuţie adecvată prelucrărilor cu modele geostatistice.

În contextul noţiunilor introduse în secţiunea anterioară, variabila X este vectorul valorilor parametrilor măsuraţi în staţiile unei reţele de monitoring la un moment dat. Coloanele matricii de date $D(X1, X2,..., Xn)$ sunt presupuse apriori a fi independente.

O altă ipotză plauzibilă este accea că $\{Xi\}$ are o distribuţie normală multivariată cu un vector mediu μ şi matricea de covarianţă Σ, distribuţie care poate fi exprimată simbolic:

$$Xi|\mu,\Sigma \sim ind\ N_p(\mu,\Sigma) \tag{3.61}$$

p - numărul de puncte de observaţie din reţea;
n - numărul de momente la care s-au executat măsurători ($i = 1...n$)

Problema care se rezolvă în ipoteza *distribuţiei normale multivariate* este cea a partiţiei selecţiei X în U şi G astfel încât prin monitorizarea partiţiei G să se reducă la maximum entropia $H(X)$.

Pentru descompunerea *entropiei totale* matricea de covarianţă se reparametrizează ca (Σ_{GG}, $\Sigma_{U|G}$, τ) conform relaţiilor:

$$\Sigma_{GG} = cov(G,G)^T = E[G - E(G)][G - E(G)]^T \tag{3.62}$$

$$\sum_{U|G} = \sum_{UU} - \sum_{UG} \cdot \sum_{GG}^{-1} \cdot \sum_{GU} \tag{3.63}$$

Matricea $\tau = \sum_{U|G} \cdot \sum_{GG}^{-1}$ este panta predictorului linear optimal al partiţiei U prin G (adică $E(U) + \tau[G-E(G)]$).

Această transformare este realizată prin decompoziţia Bartlett $\Sigma = T\ \Delta T^T$, în care

$$\Delta = \begin{bmatrix} \sum_{U|G} & 0 \\ 0 & \sum_{GG} \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} I & \tau \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

$$\Sigma^{1} = (T^{T})^{-1} \Delta^{-1} T^{-1} \tag{3.65}$$

$$\Delta - 1 = \begin{bmatrix} \sum_{U|G}^{-1} & 0 \\ & \sum_{GG}^{-1} \end{bmatrix} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} I & -\tau \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{3.66}$$

Pentru un set de date *d(X1, X2,..., Xn)* descompunerea entropiei se face în trei componente:

$$E[-\log f(X,,|d)/m(X,,|d] = HU + HMODEL + HG \tag{3.67}$$

- *HU* reprezintã incertitudinea rezidualã apriori a partiţiei *U* dupã utilizarea partiţiei *G* pentru evaluarea valorilor partiţiei *U* pe baza modelului liniar:

$$HU = E[-\log f(U|G),\mu,\Sigma)|d] \tag{3.68}$$

- *HG* reprezintã incertitudinea asupra partiţiei *G* eliminatã prin monitorizare şi necesar de maximizat printr-o partiţie optimã a variabilei *X*:

$$HG = E[-\log f(G|d)|d] \tag{3.69}$$

- *HMODEL* reprezintã incertitudinea rezidualã asupra *partiţiei U*, *mediei* şi *matricii de covarianţã* corespunzãtoare unei anumite partiţii *G* mãsurate:

$$HMODEL = E[-\log f(|\mu_U|\mu_G,G,\Sigma,d)d] + E[-\log f(\mu_G|G,\Sigma,d)|d] +$$

$$+ E[-\log f(\Sigma|G,\Psi,m,d)/m(\Sigma)|d] \tag{3.70}$$

în care Ψ şi *m* sunt parametri ai distribuţiei Wishart (Anderson,1984). Optimizarea reţelei se fundamentează pe minimizarea componentelor *HU* şi *HMODEL*.

<u>Reducerea erorii de estimare zonalã</u> se poate realiza doar prin îndesirea punctelor de observaţie. Evaluarea efectului amplasãrii unui nou punct de observaţie este posibilã prin intermediul *varianţei erorii de estimare* care depinde numai de *modelul de variogramã* şi de *distanţa* dintre punctul în care se face estimarea şi punctele de observaţie (nu depinde de valorile mãsurate !!!).

C*âştigul de precizie* ($CP(p_o)$) asociat unui punct de estimare (p_o) prin introducerea unui *punct fictiv* în zona lui de influenţã se estimeazã cu relaţia:

$$CP(p_o) = \frac{\left(\tilde{\sigma}_R^2\right)_f - \left(\tilde{\sigma}_R^2\right)_i}{\left(\tilde{\sigma}_R^2\right)_f} \tag{3.71}$$

în care

$\left(\tilde{\sigma}_R^2\right)_f$ este varianța erorii de estimare după introducerea *punctului fictiv*;

$\left(\tilde{\sigma}_R^2\right)_i$ - varianța erorii de estimare inițială.

Eficiența amplasării noilor puncte de observație se apreciază după valoarea *câştigului de precizie* obținut.

Proiectarea rețelei de monitoring

Trei etape principale sunt implicate de proiectarea unei rețele de monitoring:

- *inițializarea rețelei de monitoring;*
- *extinderea rețelei de monitoring;*
- *optimizarea rețelei de monitoring.*

Aceste etape vor fi analizate doar din punctul de vedere al contribuției lor la *reducerea erorilor de estimare* determinate de distribuția spațială a locațiilor stațiilor de observație din rețeaua de monitoring.

Inițializarea rețelei de monitoring se realizează în condițiile în care nu au fost colectate nici un fel de date într-un mod sistematic în suprafața ce urmează a fi monitorizată. Informațiile disponibile sunt în această fază limitate ca volum şi în mare măsură subiective, astfel încât orice plan rațional este aparent exclus.

Cea mai indicată alegere în aceste circumstanțe este o rețea de monitoring uniformă (cu amplasarea stațiilor de monitorizare într-o rețea pătrată). În practică, realizarea unei astfel de rețele este împiedicată de gradul de accesibilitate la punctele proiectate în teren, asigurarea securității stațiilor de monitorizare, dorința de a minimiza costul execuției, dorința de a realiza un număr maxim de stații dintr-un buget fix.

Pentru monitorizarea parametrilor ambientali, de cele mai multe ori rețelele de monitorizare s-au corelat mai mult cu densitatea populației decât cu factorii ambientali. Când cunoaşterea distribuției spațiale este vagă, o bază obiectivă şi rațională pentru proiectarea unei rețele de monitoring necesită anumite date colectate înaintea realizării unei *rețele permanente*. Numai dacă nu se pot obține prin *teledetecție,* pentru datele minime necesare se poate realiza un sistem de *stații temporare*.

Trebuie făcută distincția între locațiile care sunt potențiale stații permanente şi care sunt monitorizate temporar pentru a obține informații statistice pentru procesul de proiectare.

Corelarea unei cunoaşteri inițiale şi a unor date obținute din rețele temporare cu schema bayesianã a reducerii entropiei aduce o importantã contribuție la descrierea statisticã adecvatã a fenomenelor regionale ambientale, cu *cea mai scurtã perioadã de funcționare a rețelelor temporare*.

Două alternative ale criteriului *entropiei* sunt aplicabile:

- Maximizarea informației mutuale *I(U,G)* (3.54).

Aplicarea acestui criteriu plasează centrul de greutate asupra informațiilor obținute din *rețeaua temporarã*. Sunt necesare date în toate stațiile din partițiile *U* şi *G* în scopul stabilirii funcțiilor de frecvențã *f(U)* şi *f(U|G). Rețeaua temporarã* de monitoring trebuie sã conținã un numãr suficient de stații pentru a realiza o bunã estimare a partiției *U* chiar dacã multe vor fi numai temporare. Valoarea maximã

I(U;G) va creşte la început proporţional cu numărul staţiilor până când numărul de staţii din *G* îl depăşeşte pe cel din *U*. Acest criteriu este eficient pentru reţele cu un număr de staţii (*g*) mult mai mic decât cel al staţiilor temporare (*p*).

- Minimizarea incertitudinii *HU* + *HMODEL* (3.68-3.70).

Acest criteriu plasează pe ultimul loc rolul informaţiilor obţinute din reţeaua temporară utilizată pentru proiectarea reţelei deoarece echivalentul lui este maximizarea parametrului $|\Psi_{GG}|$. El trebuie evaluat numai pentru un set de locaţii selectate dintre staţiile care candidează la statutul de *staţii permanente*. Staţiile temporare nu contribuie la procesul de proiectare deşi teoria ia în considerare în mod explicit predicţia valorilor în staţiile temporare. Pentru compararea eficienţei unor reţele de dimensiuni diferite trebuie calculaţi parametri suplimentari pe baza unei reţele extinse care să cuprindă şi staţiile temporare. Pe măsură ce numărul staţiilor monitorizate creşte, valoarea minimă a incertitudinii *HU* + *HMODEL* descreşte în timp ce valoarea maximă *HG* creşte. Alegerea *numărului optim de staţii* în reţeaua de monitoring se face prin evaluarea efectului introducerii fiecărei locaţii asupra reducerii incertitudinii *HU* + *HMODEL*.

Extinderea unei reţele existente este similară cu iniţializarea unei reţele, diferenţa constând în faptul că primul grup de staţii necesare pentru obţinerea unor informaţii preliminare sunt *predeterminate*.

Criteriul favorizat este cel al minimizării incertitudinii *HU* + *HMODEL* (în defavoarea celui de minimizare a informaţiei mutuale *I(U;G)*). În prelucrare trebuie să se ţină seama că va fi un puternic dezechilibru între calitatea informaţiei din *reţeaua preexistentă* şi cea nouă. Informaţiile din reţeaua existentă au o mai lungă *istorie* decât cele obţinute din noile locaţii.

Optimizarea unei reţele existente este abordată în acelaşi mod ca initializarea ei dar pe baza unor *informaţii suplimentare* obţinute din reţeaua respectivă pe o anumită perioadă. Acest avantaj poate să dispară dacă distribuţia locaţiilor şi programul de măsurători realizat nu sunt adecvate descrierii variabilităţii caracteristicilor monitorizate.

Metoda *punctului fictiv* operează în această etapă în două direcţii:

- *Eliminarea locaţiilor ineficiente din reţeaua de monitoring*. Pentru fiecare punct de observaţie din reţeaua de monitoring se evaluaezã *câştigul de precizie* (3.71) şi se elimină cele care nu contribuie la reducerea erorilor de estimare în mod semnificativ.

- *Completarea reţelei de monitoring.* În zonele cu erori de estimare mai mari decât valoarea admisă se amplasează *locaţii fictive* şi se calculează eficienţa lor prin intermediul *câştigului de precizie* pe care îl determină.

Este frecventă utilizarea *hărţilor cu izolinii de câştig de precizie* realizate prin îndesirea reţelei existente printr-o reţea regulată de locaţii fictive. Selectarea locaţiilor unde se execută staţii suplimentare se face pe baza unui *câştig minim de precizie* care se alege în funcţie de gradul de detaliu solicitat în estimările spaţiale realizate.