6.4.1. Ecuaţia generală a curgerii cu suprafaţă liberă

Cea mai intuitivă metodă pentru stabilirea ecuaţiei curgerii apei subterane este ***metoda bilanţului***, aplicat unui ***volum elementar reprezentativ*** (***VER***) (eng. ***R****eprezentative* ***E****lementary* ***V****olume*). ***VER*** este un volum infinit mic care are caracteristicile acviferului în care curge apa subterană şi pentru care se stabileşte ecuaţia de curgere.

Metoda bilanţului, aplicată VER considerat omogen şi izotrop, ia în considerare debitul unitar care traversează acest volum descompus în trei componente orientate paralel cu direcţiile axelor sistemului de referinţă (OX, OY, OZ) (***Fig.1***).

Introducerea ***caracteristicilor hidrofizica ale acviferului*** (K-conductivitatea hidraulică, a-difuzivitatea hidraulică şi S-coeficientul de înmagazinare) şi a ***necunoscutei*** ecuaţiei de curgere a apei subterane (H-***sarcina piezometrică***) se face prin intermediul ***legii lui Darcy*** care permite evaluarea ***vitezei de curgere*** a apei subterane:

- $v_x = -K \cdot \frac{\partial H}{\partial x}$ pe direcţia OX
- $v_y = -K \cdot \frac{\partial H}{\partial y}$ pe direcţia OY

şi exprimarea debitelor specifice prin relaţiile:

- $q_x = v_x \cdot h = -K \cdot h \cdot \frac{\partial H}{\partial x}$ pe direcţia OX
- $q_y = v_y \cdot h = -K \cdot h \cdot \frac{\partial H}{\partial y}$ pe direcţia OX

Volumul de apă înmagazinat/eliminat în VER prin modificarea poziţiei suprafeţei piezometrice în intervalul de timp dt este:

- $V = \frac{\partial H}{\partial t} \cdot dt \cdot dx \cdot dy \cdot S$

în care
S-coeficientul de înmagazinare a apei:

- $S = n_e$ pentru un acvifer cu nivel liber
  - n_e-porozitatea efectivă

- $S = \rho_{apa} \cdot g \cdot (\alpha + n \cdot \beta)$ pentru un acvifer sub presiune
  - ρ_{apa} -densitatea apei
  - g-acceleraţia gravitaţională
  - α-coeficientul de compresibilitate a scheletului mineral
  - n -porozitatea totală
  - β-coeficientul de compresibilitate al apei

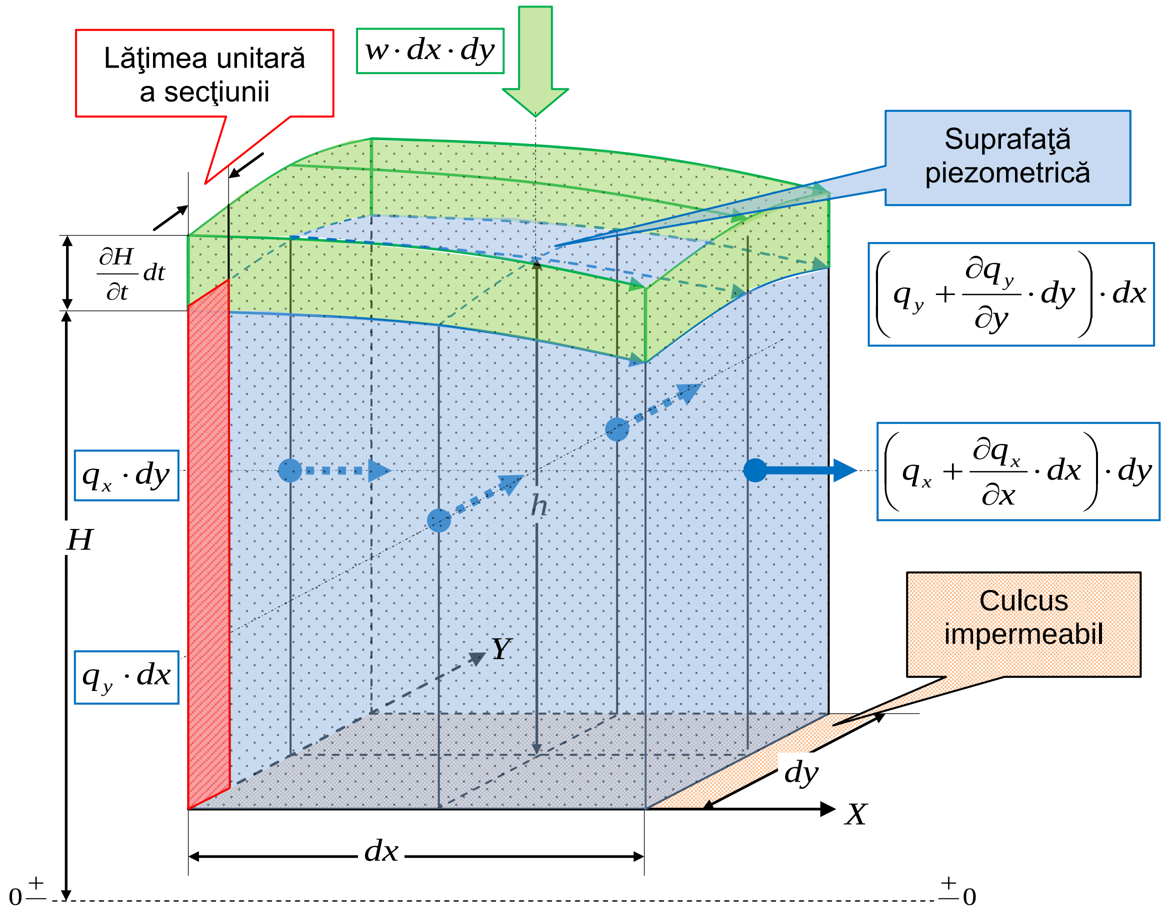

Fig.1. *Volumul elementar reprezentativ utilizat ca suport pentru metoda bianţului hidric.*

Elementele bilanţului hidric pentru un ***volum elementar reprezentativ*** (***Fig. 5.3.1***) sunt:

- q_x - debitul specific ***unitar*** (pe o lăţime unitară şi toată grosimea VER) pe direcţia OX;
- q_y - debitul specific ***unitar*** pe direcţia OY;
- $q_x \cdot dy$ - debitul total care intră în VER pe direcţia OX;
- $q_y \cdot dx$ - debitul total care intră în VER pe direcţia OY;
- $\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot dx\right) \cdot dy$ -debitul total care iese din VER pe direcţia OX;
- $\left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot dx$ -debitul total care iese din VER pe direcţia OY;
- $w \cdot dx \cdot dy$ - debitul total infiltrat în VER pe direcţia OZ.

Ecuaţia de ***bilanţ hidric*** pentru VER stabilită pe baza componentelor (***Tabelul 5.3.1***)

Tabelul 5.3.1. *Elementele ecuaţie de bilanţ pentru V.E.R.*

Direcţia	INTRARI	IESIRI	STOCARE
OX	$q_x \cdot dy \cdot dt$	$\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot dx\right) \cdot dy \cdot dt$	$V = \frac{\partial H}{\partial t} \cdot dt \cdot dx \cdot dy \cdot S$
OY	$q_y \cdot dx \cdot dt$	$\left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot dx \cdot dt$	
OZ	$w \cdot dx \cdot dy \cdot dt$		

pe direcţiile axelor sistemului de coordinate (OX, OY, OZ) este:

$$\boxed{q_x \cdot dy \cdot dt - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot dx\right) \cdot dy \cdot dt + q_y \cdot dx \cdot dt - \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot dx \cdot dt + w \cdot dx \cdot dy \cdot dt = \frac{\partial H}{\partial t} \cdot dt \cdot dx \cdot dy \cdot S}$$

şi după simplificare:

$$\boxed{-\frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + w = \frac{\partial H}{\partial t} \cdot S}$$

Înlocuind expresiile debitelor unitare în funcţie de legea lui Darcy se obţine ecuaţia lui Boussinesq (ecuaţie diferenţială nelineară care nu poate fi rezolvată decât pentru anumite cazuri particulare):

$$\boxed{\frac{\partial\left(h \cdot K \cdot \frac{\partial H}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(h \cdot K \cdot \frac{\partial H}{\partial y}\right)}{\partial y} + w = \frac{\partial H}{\partial t} \cdot S}$$

care poate fi ***linearizată*** prin introducerea următoareleor schematizări:

- culcuşul acviferului este ***orizontal*** şi plasat la ***nivelul de referinţă*** (± 0), astfel încât $H = h$
- modificarea sarcinii piezometrice de-alungul liniei de curent ce traversează V.E.R este foarte mică, astfel că ***grosimea medie a acviferului***(h_m) poate fi considerată egală cu ***sarcina piezometrică***(H): $h_m = h = H$
- acviferul este omogen şi izotrop: $K = const.$

sub forma:

$$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{w}{K \cdot h_m} = \frac{S}{K \cdot h_m} \cdot \frac{\partial h}{\partial t}}$$

sau introducând parametrul ***difuzivitate hidraulică*** : $\boxed{a = \frac{K \cdot h_m}{S}}$

sub forma:

$$\boxed{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{w}{T}=\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial h}{\partial t}}$$

sau:

$$\boxed{a\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+a\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{w}{S}=\frac{\partial h}{\partial t}}$$

Dacă ***acviferul cu nivel liber*** este alimentat şi prin ***drenanţă*** (ε) prin intermediul unui strat semipermeabil, ***ecuaţia generală linearizată a curgerii cu suprafaţă liberă, nestaţionară şi neconservativă*** se completează cu un termen suplimentar, şi are forma:

$$\boxed{a\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+a\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{w}{S}\pm\frac{\varepsilon}{S}=\frac{\partial h}{\partial t}} \quad \text{cu} \quad \boxed{a=\frac{K\cdot h_m}{S}}$$

în care

a -coeficientul difuzivităţii hidraulice
h_m -grosimea medie a acviferului cu nivel liber
S -coeficientul de înmagazinare
$S = n_e$ pentru un acvifer cu nivel liber
n_e -porozitatea efectivă,
H - sarcina piezometrică în acviferul freatic ($h = H$; ***Fig.2***),
x - distanţa de-a lungul axei OX
y - distanţa de-a lungul axei OY
w -modulul de infiltrare
ε -intensitatea drenanţei

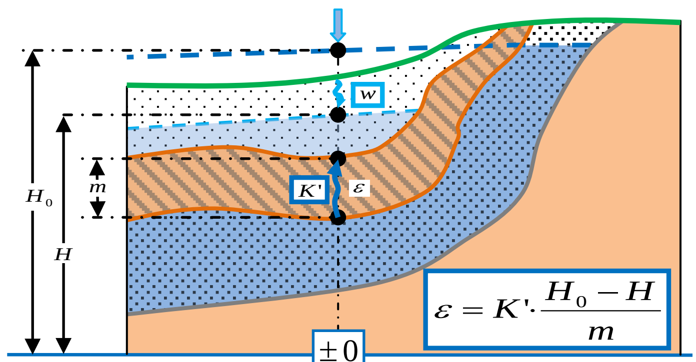

Fig.2. *Alimentarea acviferului freatic*
(w -infiltrare şi ε - drenanţă)

K' - conductivitatea hidraulică a culcuşului semipermeabil
m - grosimea culcuşului semipermeabil
H_0 -sarcina piezometrică în acviferul sub presiune care alimentează prin drenanţă acviferul cu nivel liber/freatic.
$\boxed{\pm 0}$-nivel energetic de referinţă

6.4.1.1. Curgere nestaţionară conservativă cu suprafaţă liberă

Ecuaţia curgerii în ***regim nestaţionar*** pentru un acvifer cu suprafaţă liberă omogen şi izotrop

$$\boxed{a \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + a \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{w}{S} \pm \frac{\varepsilon}{S} = \frac{\partial h}{\partial t}}$$

pentru o ***soluţionare analitică***, impune o serie de simplificări care conduc la ***schematizarea spaţială şi parametrică***:

- curgere ***unidimensională***: curgerea este identică în plane verticale şi paralele, adică sarcina piezometrică nu variază decât în funcţie de x

$$\boxed{a \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{w}{S} \pm \frac{\varepsilon}{S} = \frac{\partial h}{\partial t}}$$

- curgere ***conservativă***: acviferul cu nivel liber:
    - nu este alimentat prin infiltraţii : $\boxed{w = 0}$
    - nu este alimentat prin drenanţă: $\boxed{\varepsilon = 0}$

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}$$

- condiţiile pe frontiere pentru integrarea ecuaţiei curgerii ***nestaţionare, unidimensionale şi conservative*** (***Fig.3***):
    - **VEST**: sarcină piezometrică variabilă (nivelul apei din râu/lac/canal)

      $\Delta H(0,t) = \Delta H_0$ pentru ($x = 0$ şi $t = t$)
    - **EST**: sarcină piezometrică practic constantă:

      $\frac{\partial(\Delta H(x,t))}{\partial x} = 0$ pentru ($x \to \infty$ şi $t = t$)

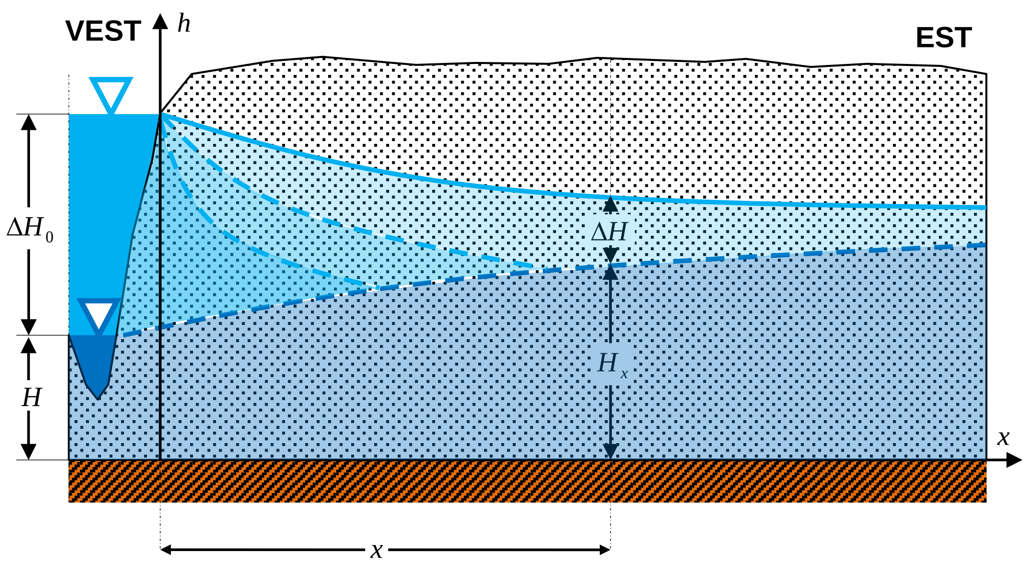

Fig.3.*Condiţiile pe contur pentru curgerea unidimensională nestaţionară şi conservativă în acviferul cu nivel liber*

Pentru aceste simplificări, ***soluţia*** ecuaţiei curgerii unidimensionale, nestaţionare pentru un acvifer cu nivel liber din lunca unui râu (***Fig.3***) este:

$$\boxed{\Delta H(x,t) = \Delta H_0 \cdot erfc(\lambda)}$$

în care

ΔH_0 -modificarea sarcinii piezometrice pe contur

$erfc(\lambda)$-complementara funcţiei $erf(\lambda)$:

$$\boxed{erfc(\lambda) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\lambda} e^{-\lambda^2} d\lambda}$$ cu $$\boxed{\lambda = \frac{x}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}}}$$ şi $$\boxed{h_m = \frac{(H + \Delta H_0) + (H_x + \Delta H)}{2}}$$

6.4.1.2. Curgere staţionară neconservativă cu suprafaţă liberă

Modelul curgerii unidimensionale, staţionare, neconservative cu suprafaţă liberă se obţine din ecuaţia generală:

$$\boxed{a \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + a \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{w}{S} \pm \frac{\varepsilon}{S} = \frac{\partial h}{\partial t}}$$

cu următoarele simplificări:

- pentru caracterul unidimensional $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$
- pentru caracterul staţionar: $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$
- pentru lipsa alimentării prin drenanţă: $w = 0$

ecuaţia modelului se reduce la:

$$\boxed{a \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{w}{S} = 0}$$

Deoarece $a = \frac{T}{S} = \frac{K \cdot h}{S}$, în ipoteza $h_m = h = H$, ecuaţia modelului devine:

$$\frac{d}{dx}\left(-K \cdot h \frac{dh}{dx} \right) = w$$

în care $q(x) = -K \cdot h \frac{dh}{dx}$ este debitul unitar la distanţa x de secţiunea 1 (***Fig.4***).

În raport cu ***debitul unitar*** şi ***modulul de alimentare***, ecuaţia diferenţială a modelului curgerii unidimensionale, staţionare, neconservative cu suprafaţă liberă este:

$$\frac{dq(x)}{dx} = w$$

Prin integrare între secţiunea 1 şi o secţiune oarecare x se obţine:

$$\int_0^x dq(x) = \int_0^x w \cdot dx$$ din care rezultă $q(x) = q_0 + w \cdot x$ în care $q(x) = -K \cdot h \dfrac{dh}{dx}$

Modelul diferenţial al curgerii neconservative plan-verticale cu nivel liber este:

$$\boxed{-K \cdot h \cdot \frac{dh}{dx} = q_0 + w \cdot x}$$

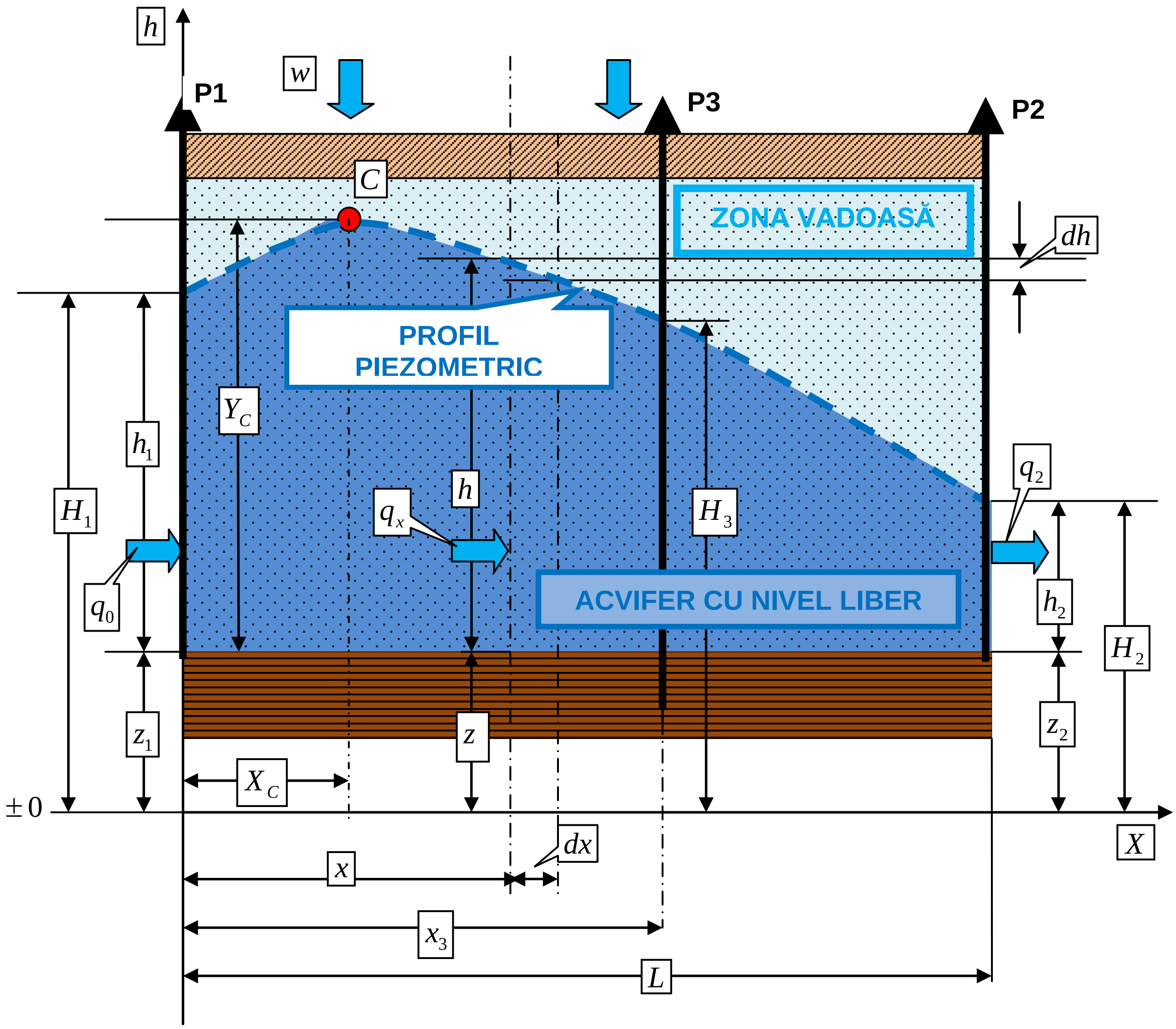

Fig.4. *Acvifer omogen cu nivel liber cu alimentare din infiltraţii*

Modelul diferenţial al curgerii permite calculul pentru:

- modulul de infiltrare w
- debitul unitar $q(x)$ pentru orice $x \in [0, L]$
- ecuaţia profilului piezometric $h(x)$
- poziţia punctului de cumpănă $C(X_C, Y_C)$

Modul de infiltrare (w) şi debit unitar ($q(x)$)

Calculul debitului unitar presupune integrarea modelului diferenţial de două ori, utilizând ca limite de integrare cele ***trei piezometre*** în care se cunoaşte sarcina piezometrică şi grosimea acviferului:

- (**P1P2**): $-K\cdot\int_{h_1}^{h_2} h\cdot dh = q_0\cdot\int_0^L dx + w\cdot\int_0^L x\cdot dx$
- (**P1P3**): $-K\cdot\int_{h_1}^{h_3} h\cdot dh = q_0\cdot\int_0^{x_3} dx + w\cdot\int_0^{x_3} x\cdot dx$

Cele două ecuaţii obţinute formează un sistem cu două necunoscute:

- Debitul unitar în secţiunea 1: q_0
- Modulul de infiltrare: w

$$\begin{cases} K\cdot\dfrac{h_1^2-h_2^2}{2} = q_0\cdot L + w\cdot\dfrac{L^2}{2} \\ K\cdot\dfrac{h_1^2-h_3^2}{2} = q_0\cdot x_3 + w\cdot\dfrac{x_3^2}{2} \end{cases}$$

Prin rezolvarea sistemului se obţin relaţiile de calcul pentru:

- Modulul de infiltrare: $w = K\cdot\left[\dfrac{h_1^2-h_2^2}{L\cdot(L-x_3)} - \dfrac{h_1^2-h_3^2}{x_3\cdot(L-x_3)}\right]$ care reprezintă volumul de apă infiltrat pe unitatea de suprafaţă şi în unitatea de timp, traversând ***zona vadoasă*** (zonă parţial saturată cu apă, cuprinsă între suprafaţa topografică şi suprafaţa liberă a acviferului)

- Debitul unitar în secţiunea 1: $q_0 = \dfrac{K}{2\cdot L}\cdot\left(h_1^2-h_2^2\right) - w\cdot\dfrac{L}{2}$

- Debitul unitar pentru orice secţiune $x\in[0,L]$: $q_x = \dfrac{K}{2\cdot L}\cdot\left(h_1^2-h_2^2\right) - w\cdot\left(\dfrac{L}{2}-x\right)$

Profil piezometric ($h(x)$)

Ecuaţia profilului piezometric se obţine prin integrarea ecuaţiei diferenţiale a curgerii între unul din cele două piezometre (de exemplu P1) şi o secţiune oarecare aflată la distanţa x, acolo unde grosimea acviferului este h:

$$-K\cdot\int_{h_1}^{h} h\cdot dh = q_1\cdot\int_0^x dx + w\cdot\int_0^x x\cdot dx$$

în care înlocuind expresia debitului unitar q_1 se obţine:

$$h(x)=\sqrt{h_1^2-\frac{h_1^2-h_2^2}{L}\cdot x+\frac{w\cdot x}{K}\cdot(L-x)}$$

<u>Punct de cumpănă al apelor subterane (X_C, Y_C)</u>

Abscisa punctului de cumpănă a apelor subterane (X_C) se obţine prin egalarea debitului unitar în secţiunea X_C cu zero:

$$q_{X_C}=\frac{K}{2\cdot L}\cdot\left(h_1^2-h_2^2\right)-w\cdot\left(\frac{L}{2}-X_C\right)=0 \Rightarrow X_C=\frac{L}{2}-\frac{K}{w}\cdot\left(\frac{h_1^2-h_2^2}{2\cdot L}\right)\cdot$$

Ordonata punctului de cumpănă a apelor subterane (Y_C) se obţine din ecuaţia profilului piezometric în care x se înlocuieşte cu valoare lui X_C:

$$Y_C=\sqrt{h_1^2-\frac{h_1^2-h_2^2}{L}\cdot X_C+\frac{w\cdot X_C}{K}\cdot(L-X_C)}$$

Datele necesare pentru calculul **debitului unitar** şi a ecuaţiei profilului piezometric, se măsoară în minimum trei piezometre amplasate pe un aliniament perpendicular direcţia de curgere şi sunt:

- cota culcuşului acviferului: $z_1 = z \ \ = z_2$
- cotele nivelului piezometric: H_1, H_2, H_3
- distanţa dintre cele două piezometre: L, x_3
- conductivitatea hidraulică: K

6.4.1.3. Curgere staţionară conservativă cu suprafaţă liberă

Modelul curgerii unidimensionale, staţionare, conservative cu suprafaţă liberă se obţine din ecuaţia generală:

$$\boxed{a\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+a\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}+\frac{w}{S}\pm\frac{\varepsilon}{S}=\frac{\partial h}{\partial t}}$$

cu următoarele simplificări:

- pentru caracterul unidimensional $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0$

- pentru caracterul staţionar: $\frac{\partial h}{\partial t}=0$
- pentru lipsa alimentării prin infiltrare: $w=0$
- pentru lipsa alimentării prin drenanţă $\varepsilon=0$

ecuaţia modelului se reducânduce la:

$$\boxed{a\cdot\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=0}$$

Deoarece $a=\frac{T}{S}=\frac{K\cdot h}{S}$, în ipoteza $h_m=h=H$, ecuaţia modelului devine:

$$\frac{d}{dx}\left(-K\cdot h\frac{dh}{dx}\right)=0$$

în care $q(x)=-K\cdot h\frac{dh}{dx}$ este debitul unitar la distanţa x de secţiunea 1 (***Fig.4***).

În raport cu ***debitul unitar*** şi ***modulul de alimentare***, ecuaţia diferenţială a modelului curgerii unidimensionale, staţionare, neconservative cu suprafaţă liberă este:

$$\frac{dq(x)}{dx}=0$$

Prin integrare între secţiunea 1 şi o secţiune oarecare x se obţine:

$\int_0^x dq(x)=0$ din care rezultă $q(x)=q_0$ în care $q(x)=-K\cdot h\frac{dh}{dx}$

Modelul diferenţial al curgerii neconservative plan-verticale cu nivel liber este:

$$\boxed{q_0=-K\cdot h\cdot\frac{dh}{dx}}$$

Modelul diferenţial al curgerii permite calculul pentru:

- ***debitul unitar*** q_0, constant, pentru orice $x\in[0;L]$
- ***ecuaţia profilului piezometric*** $h(x)$ pentru $x\in[0;L]$

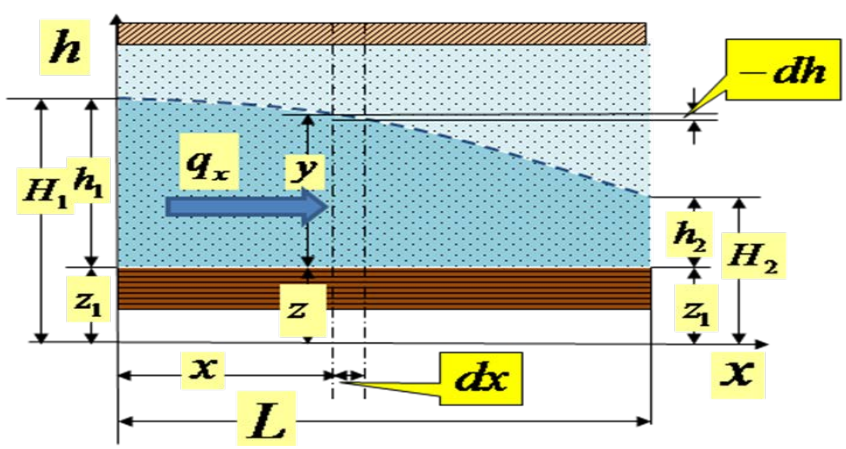

Fig.5. *Curgere neconservativă plan-verticală cu nivel liber*

Debitul unitar (q_0)

Calculul ***debitului unitar*** q_0 presupune integrarea ecaaţiei modelulului diferenţial al curgerii neconservative plan-verticale cu nivel liber între două limite în care se cunoaşte sarcina piezometrică (***Fig.5***):

$$q_0 \cdot \int_0^L dx = -K \cdot \int_{h_1}^{h_2} y \cdot dy$$

$$\boxed{q_0 = \frac{K \cdot \left(h_1^2 - h_2^2\right)}{2 \cdot L} = K \cdot \frac{h_1 - h_2}{L} \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} = K \cdot I_m \cdot h_m = V_m \cdot \Omega_m}$$

în care

I_m - gradientul hidraulic mediu

$$I_m = \frac{h_1 - h_2}{L}$$

K - conductivitatea hidraulică

V_m - viteza medie de filtrare a apei

$$V_m = K \cdot I_m$$

h_m - grosimea medie a acviferului

$$h_m = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

Ω_m - secţiunea unitară medie a acviferului

$$\Omega_m = h_m \cdot 1$$

Profilului piezometric ($h(x)$)

Ecuaţia profilului piezometric se obţine prin integrarea ecuaţiei diferenţiale a curgerii neconservative plan-verticale cu nivel liber între unul din cele două piezometre (de exemplu P1) şi o secţiune oarecare aflată la distanţa x, acolo unde grosimea acviferului este h_x:

$$q \cdot \int_0^x dx = -K \cdot \int_{h_1}^{h_x} y \cdot dy \Rightarrow q \cdot x = K \cdot \frac{h_1^2 - h_x^2}{2}$$

În care introducând expresia debitului unitar q_0 rezultă succesiv:

$$\frac{K \cdot \left(h_1^2 - h_2^2\right)}{2 \cdot L} \cdot x = K \cdot \frac{h_1^2 - h_x^2}{2} \Leftrightarrow \frac{\left(h_1^2 - h_2^2\right)}{L} \cdot x = h_1^2 - h_x^2$$

şi în final se obţine expresia pentru calculul profilului piezometric:

$$\boxed{h_x = \sqrt{h_1^2 - \frac{h_1^2 - h_2^2}{L} \cdot x} ; x \in [0, L]}$$