HIDRAULICĂ SUBTERANĂ
(note de curs)

Daniel Scrădeanu

2. ECUAŢIILE GENERALE DE MIŞCARE ALE UNUI LICHID

Lichidul este cazul particular al unui mediu continuu posedând proprietăţi mecanice care sunt comune materiei în orice stare de agregare (solid, lichid, gazos).

Lichidele sunt fluide foarte puţin compresibile, iar la contactul cu gazele au o suprafaţă liberă. Fluidele sunt corpuri la care forţele de coeziune sunt foarte mici iar deformările fără reduceri de volum pot fi produse cu forţe foarte mici (iau forma vasului în care sunt puse).

Ipoteza continuităţii fluidelor este introdusă pentru simplificarea fenomenului extrem de complex al mişcării fluidelor şi se fundamentează pe observaţia că fenomenele studiate au caracter macroscopic deoarece aparatele nu pot înregistra variaţii ale diferitelor mărimi fizice (presiune, temperatură etc.) pe cuburi cu latura mai mică de 10 microni, volum în care se găsesc $2{,}7\text{x}10^{10}$ molecule de aer la p=1 atmosferă şi t=0^0C, argument convingător pentru acceptarea ipotezei continuităţii fluidelor

Ipoteza continuităţii este extinsă la orice scară şi toate mărimile fizice asociate fluidului sunt ***funcţii continue*** în domeniul ocupat, astfel că fluidul devine prin acceptarea ipotezei continuităţii un mediu continuu deformabil.

Modelele mecanice de lichid utilizate pentru studiul mişcării acestora sunt:

- Lichid fictiv: incompresibil, fără greutate, fără vâscozitate
- Lichid perfect: incompresibil, cu greutate, fără vâscozitate
- Lichid real: compresibil, cu greutate, cu vâscozitate.

Mişcarea unui lichid se face de obicei într-un spaţiu limitat şi poate fi separată în:

- Curent este o masă fluidă în care majoritate particulelor participă la mişcarea care poate fi: convergentă, divergentă sau de rotaţie în jurul unui ax (vârtej)
- Mişcare de agitaţie care se caracterizează prin oscilaţii ale particulelor în jurul unor poziţii medii (valurile, mareele, oscilaţii ale apei în castelele de echilibru etc.)
- Perturbări produse prin impuls local, au ca efect perturbări ale presiunii şi formei şi au caracterul unor unde.

Mişcarea lichidelor se exprimă prin ecuaţii de echilibru între forţele care acţionează într-un lichid.

2.1. Forţele care acţionează într-un lichid

Lichidul este considerat un mediu continuu format dintr-o infinitate de particule materiale care sunt permanent în contact şi asupra căruia acţionează trei tipuri de forţe:

- ***forte masice***
- ***forţe de inerţie***
- ***forte de tensiune***

2.1.1. Forţe masice

Forţele masice/volumice sunt datorate unor câmpuri de atracţie (câmp newtonian, câmp magnetic) şi sunt proporţionale cu (ΔV). Pentru câmpul gravitaţional cu acceleraţia $\vec{g}$ (forţa masică unitară) şi (ΔV) forţa volumică este:

$$\vec{F}_M = \vec{G} \cdot m$$

2.1.2. Forţe de inerţie

Forţele de inerţie intervin atunci când particula este în mişcare şi supusă unei acceleraţii, Forţele de inerţie au sens contrar vectorului acceleraţie şi sunt egale cu produsul dintre masa particulei şi acceleraţie.

$$\vec{F}_i = \vec{a} \cdot m$$

2.1.3. Forte de tensiune

Forţele de tensiune, rezultate din forţele de atracţie moleculară, de natură elastică, preponderent de compresiune pentru lichide, asigură continuitatea mediului material.

Forţele de tensiune au dimensiunea $\left[F \cdot L^{-2}\right]$ şi se exercită asupra fluidului din domeniul ***D*** de fluidul din exteriorul suprafeţei ***S*** sau de solidele venite în contact cu suprafaţa **S** (***Fig.2.1***.).

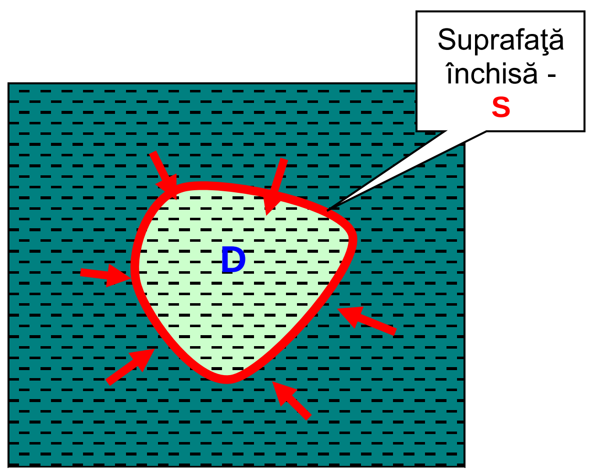

Fig.2.1. *Forţele de tensiune la interfaţă.*

Forţele de tensiune $(\vec{T})$ actionează:

- ***tangential*** la suprafaţa de separaţie a particulelor de lichid, atât în stare de repaus cât şi în stare de mişcare a acesteia :

$$\vec{T} = \frac{\vec{F}_\tau}{S}$$ numit efort unitar sau tensiune

- ***normal*** la fiecare element al suprafeţei **S** în stare de repaus şi se numeşte *presiune statică*:

$$\vec{T} = \frac{F_\tau}{S} = \vec{p}$$

2.2. Ecuaţiile diferenţiale de mişcare

Condiţile de mişcarea ale unui lichid se exprimă prin ecuaţii de echilibru între forţele care acţionează asupra fiecărei particule de lichid:

- Forţele de masice;
- Forţele de inerţie
- Forţele de tensiune

Echilibrul celor trei categorii de forte se scrie pentru o particulă infinitezimală de lichid de forma unui paralelipiped elementar (dx, dy, dz; ***Fig.2.2***). Vârful paralelipipedului elementar de fluid plasat în originea sistemului de referinţă (O) este deplasat cu:

- viteza $\vec{v}$, ale cărei componente de-a lungul celor trei axe de coordonate sunt: v_x, v_y, v_z
- acceleraţia $\vec{a}$, cu componenetele axiale: a_x, a_y, a_z.

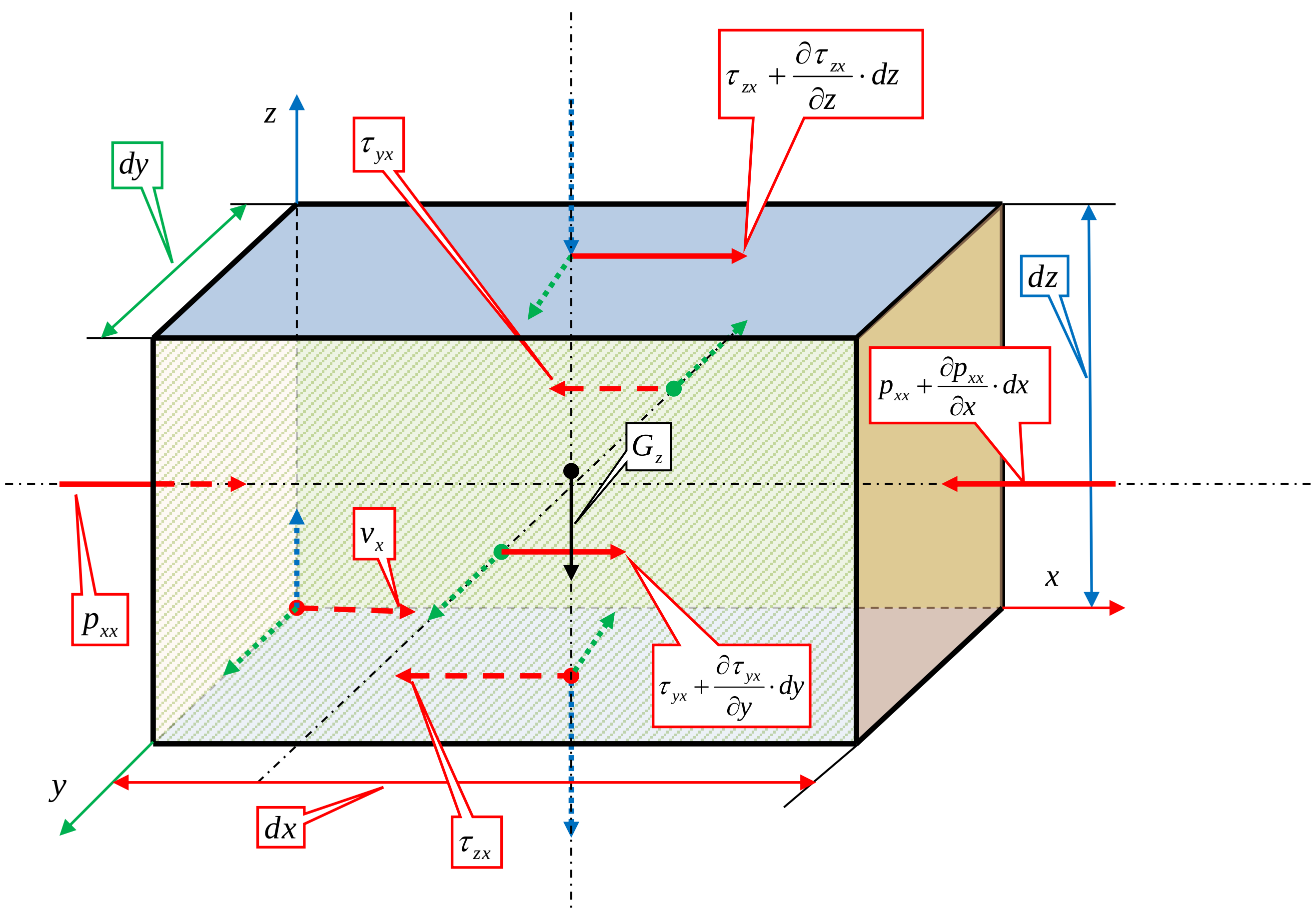

Fig. 2.2.*Starea de tensiune pe feţele unei particule de lichid*

(sunt "nominalizate" numai componentele paralele cu axa Ox, cu excepţia forţei masice G_z*)*

Forţele masice sunt aplicate în centrul elementului paralelipipedic, iar componentele paralele cu axele sistemului de referinţă sunt: G_x, G_y, G_z (G_z fiind singura componentă nenulă în câmpul gravitaţional).

Forţele de tensiune pe feţele paralelipipedului sunt:

- normale (presiunile), notate cu doi indici (primul al normalei la suprafaţa pe care este perpendiculară, al doilea cel al direcţiei presiunii): p_{xx}, p_{yy}, p_{zz}.
- tangenţiale notate cu acelaşi sistem de indici (primul indice al normalei pe suprafaţa în care este cuprinsă forţa de tensiune, al doilea al axei cu care este paralelă forţa de tensiune): $\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}$

Ecuaţiile diferenţiale ale mişcării se scriu:

- proiectând toate forţele pe axele de coordonate OX,OY, OZ.
- ţinând seama de creşterile diferenţiale în raport cu creşterile dx, dy, dz, pe feţele elemetului paralelipipedic necomune cu vârful O.

Procedura pentru axa OX este:

- proiecţia forţelor masice şi de inerţie este:

$$G_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz - a_x \cdot \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \rho \cdot (G_x - a_x) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

- proiecţia forţelor de presiune, perpendiculare pe feţele paralele cu planul YOZ, este:

$$p_{xx} \cdot dy \cdot dz - \left(p_{xx} \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \right) = -\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

- proiecţia forţelor tangenţiale din feţele elementului paralelipipedic care dau componente paralele cu axa OX:
  - pe feţele paralele cu XOY:

$$-\tau_{zx} \cdot dx \cdot dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot dx \cdot dy = +\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

  - pe feţele paralele cu XOZ:

$$-\tau_{yx} \cdot dx \cdot dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx \cdot dz = +\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

- echilibrarea proiecţiilor tuturor forţelor pe axa OX se sintetizează prin însumarea lor şi egalarea cu zero:

$$\rho \cdot (G_x - a_x) \cdot dx \cdot dy \cdot dz - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0$$

Prin reducerea tremenilor comuni dx, dy, dz şi repetarea procedurii pentru axele OY, OZ se obţine sistemul de ecuaţii diferenţiale ale mişcării mediului lichid (Navier):

$$\rho \cdot (G_x - a_x) - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$
$$\rho \cdot (G_y - a_y) - \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0$$
$$\rho \cdot (G_x - a_x) - \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$$

Acceleraţia se poate exprima prin derivatele substanţiale în raport cu spaţiul (x, y, z) şi timpul (t):

$$a_x = \frac{Dv_x}{Dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

$$a_x = \frac{Dv_y}{Dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$a_x = \frac{Dv_z}{Dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Ecuaţiile diferenţiale de mişcare (Navier) conţin un număr mare de parametri necunoscuţi care se pot afla asociind un număr suplimentar de ecuaţii care exprimă:

- conservarea masei (continuitate);
- continuitatea de formă;
- deformabilitatea lichidelor;
- starea fizică a materiei;
- transferul de căldură şi conservarea energiei
- funcţia de vâscozitate